Règles sur les inégalités

1 Opérations sur les inégalités

Règles 1

Pour tout a : $x < y \Leftrightarrow x + a < y + a$ *(même sens)*
Pour tout $k > 0$: $x < y \Leftrightarrow kx < ky$ *(même sens)*
Pour tout $k < 0$: $x < y \Leftrightarrow kx > ky$ *(sens contraire)*
Pour x et y de même signe : $x < y \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$ *(sens contraire)*
Pour $x > 0$ et $y > 0$: $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$ *(même sens)*
Pour $x > 0$ et $y > 0$: $x < y \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$ *(même sens)*
Si f croissante sur I : $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$ *(même sens)*
Si f décroissante sur I : $x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y)$ *(sens contraire)*

Exemples :

- Sachant que $3 < x < 5$, que peut-on en conclure pour $\dfrac{1}{3-x}$?

$$3 < x < 5 \Rightarrow -5 < -x < -3 \Rightarrow -2 < 3 - x < 0 \Rightarrow \frac{1}{3-x} < -\frac{1}{2}$$

- Comment montrer que pour tout $x > 1$, $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$?

  Pour tout $x > 1$

$$0 < x^2 - 1 < x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2-1} < x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{1}{x}$$

Rappels :

- On peut toujours **ajouter** membre à membre deux inégalités.
- On peut **multiplier** membre à membre deux inégalités si tous les termes sont **positifs**.
- On **ne peut pas soustraire ou diviser** membre à membre deux inégalités.

Encadrement de : $x - y$

On détermine d'abord un encadrement de $-y$, puis on effectue la somme membre à membre avec celui de x.

Exemple :
$$\begin{cases} -2 < x < 3 \\ -4 < y < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < x < 3 \\ 1 < -y < 4 \end{cases} \Rightarrow -1 < x - y < 7.$$

Encadrement de : $\dfrac{x}{y}$: (bornes de l'encadrement de x et y de même signe)

On détermine d'abord un encadrement de $\dfrac{1}{y}$, puis il faut s'arranger pour multiplier membre à membre deux encadrements dont tous les termes sont positifs.

Exemples :

1)
$$\begin{cases} 8 < x < 9 \\ 3 < y < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 < x < 9 \\ \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 2 < \frac{x}{y} < 3.$$

2)
$$\begin{cases} -2 < x < -1 \\ 2 < y < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < -x < 2 \\ \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{-x}{y} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x}{y} < -\frac{1}{3}$$

Méthode importante à connaître : (valable pour les fonctions et les suites)

Pour montrer que $A < B$, il est dans certains cas plus facile de calculer $A - B$, puis en étudiant son signe de montrer que $A - B < 0$.

Exemple : Comment montrer que si $x < 1$ alors $\dfrac{x-8}{2x-9} < 1$?

Pour tout $x < 1$, $\dfrac{x-8}{2x-9} - 1 = \dfrac{1-x}{2x-9} < 0$ car $\begin{cases} 1 - x > 0 \\ 2x - 9 < -7 \end{cases}$

2 Inégalités classiques

Règles 2 Pour tout x réel : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$