DM 30 mars
TS

1. On étudie le signe de $f(x)-g(x)$

$f(x)-g(x) = \ln x\,[1-\ln x]$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$	‖	$-$		$+$		$-$	

$1-\ln x \geq 0$
$\iff 1 \geq \ln x$
$\iff x \leq e$.

$\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[1;e]$
$\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]0;1[\,\cup\,]e;+\infty[$

2a On étudie le signe de $h'(x)$ sur I

$h'(x) = f'(x) - g'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{x}$

$\forall x>0$, $h'(x)$ est du signe de $1-2\ln x$ et $1-2\ln x \geq 0 \iff x \leq e^{1/2}$

On a donc

x	0		$e^{1/2}$		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖	$\nearrow$	$0{,}25$	$\searrow$	

2b Sur $[1;e]$, $f(x) \geq g(x)$ donc $h(x) = f(x)-g(x) \geq 0$ d'après 1)

donc $\boxed{MN = h(x)}$

D'après 2a, on en déduit que MN est maximale pour $x = e^{1/2}$

2c Sur $]0;1[\,\cup\,]e;+\infty[$ $f(x)-g(x) < 0$ donc $\boxed{MN = |f(x)-g(x)| = g(x)-f(x) = -h(x)}$

Méthode 1

$MN = 1 \iff -h(x) = 1$
$\iff h(x) = -1$
$\iff f(x)-g(x) = -1$
$\iff \ln x - (\ln x)^2 + 1 = 0$
$\iff (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ $\quad (E)$

On pose $X = \ln x$ et on résout $X^2 - X - 1 = 0$ $\quad (E')$

On a $X_1 = \dfrac{1+\sqrt5}{2}$ et $X_2 = \dfrac{1-\sqrt5}{2}$ solutions de (E')

d'où $x_1 = e^{\frac{1+\sqrt5}{2}} \approx 5{,}04$ et $x_2 = e^{\frac{1-\sqrt5}{2}} \approx 0{,}54$ solutions de (E)

Méthode 2

x	0	a	1	e	b	$+\infty$
$h(x)$	‖	$\nearrow$		╱╱	$\searrow$	
$MN = -h(x)$	‖ $+\infty$	1 $\searrow$	0	0	$\nearrow$ 1	$+\infty$

Vous appliquez le corollaire du TVI successivement sur $]0;1[$ et $]e;+\infty[$
$-h$ étant continue / strict^t monotone et $1 \in]0;+\infty[$
.....