Lois continues : Partie III
Loi exponentielle

De nos jours, nous avons une idée de la probabilité de vivre 40 ans pour un enfant qui vient de naître. Les tables de mortalité donnent un nombre de l'ordre de 0,98. La probabilité de vivre 40 ans de plus, pour une personne de 50 ans, est un nombre bien inférieur, de l'ordre de 0,65. Pour une personne de 60 ans, cette probabilité de vivre 40 ans de plus est de l'ordre de 0,02. Le fonctionnement naturel des humains et des animaux suit la loi du vieillissement ou de l'usure : on n'a pas la même probabilité de vivre 40 ans de plus lorsque l'on vient de naître ou lorsque l'on a déjà 50 ou 60 ans.

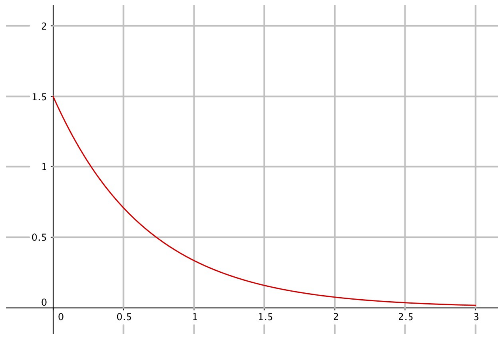
La plupart des phénomènes naturels sont soumis au processus de vieillissement.

Il existe des phénomènes où il n'y a pas de vieillissement ou d'usure. Il s'agit en général de phénomènes accidentels. ***Pour ces phénomènes, la probabilité, pour un objet d'être encore en vie ou de ne pas tomber en panne avant un délai donné sachant que l'objet est en bon état à un instant t, ne dépend pas de t.***

Les variables aléatoires décrivant une durée de vie sans usure suivent toutes ***une loi exponentielle****.*

1. Définition : soit λ un réel *strictement positif*.
Une variable aléatoire à densité X suit une loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité est la fonction *f* définie sur [0; +∞ [par $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.

Exemple 1 : X est une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
La courbe C_f ci-contre représente la fonction densité associée à la loi exponentielle de paramètre λ.



a. Lire graphiquement λ puis en déduire l'expression de $f(x)$.

On lit $f(0)=1{,}5$ d'où $\lambda\times e^0=1{,}5$ et $\lambda=1{,}5$.

b. Déterminer $P(0<X<0{,}5)$; $P(X\geqslant 1)$ à 10^{-3} près.

Il s'agit donc de calculer les aires sous la courbe :

$$P(0<X<0{,}5)=\int_0^{0{,}5} f(x)\,dx \text{ et } P(X\geqslant 1)=\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

Une primitive de $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ est $F(x)=-e^{-\lambda x}$ avec $\lambda=1{,}5$.

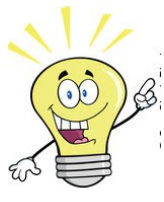
d'où $P(0<X<0{,}5)=F(0{,}5)-F(0)=-e^{-0{,}5\times 1{,}5}+1$ =0,528 à 10^{-3} près.

$P(X\geqslant 1)=1-P(0\leqslant X\leqslant 1)=1-(F(1)-F(0))=1-(-e^{-1{,}5}+1)=e^{-1{,}5}$ = 0,223 à 10^{-3} près.

2. Propriété : si T suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors pour tous réels *a* et *b* tels que $0\leqslant a\leqslant b$ on a :

$P(a\leqslant T\leqslant b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$ $\quad P(T\leqslant b)=1-e^{-\lambda b}$ $\quad P(T>a)=e^{-\lambda a}$

Preuves

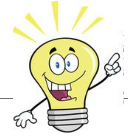


Reprendre l'exemple 1 avec cette propriété. À vous de voir si vous apprenez ces formules par cœur ou si vous les retrouvez à l'aide de la primitive de $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ *qui est* $F(x)=-e^{-\lambda x}$.

Savoir faire 3 et 4 p 327 - Exercice 14 page 334
Exercices 10 à 15 page 334 (voir page 2 pour le calcul de l'espérance)

Vidéos : Y.Monka : https://youtu.be/tL8-UTORSLM
Mathrix : https://www.youtube.com/watch?v=zOod3hghw2Q
Une minute pour comprendre : http://www.uneminutepourcomprendre.org/exercices/exercice-probabilite-loi-exponentielle/

3. Durée de vie sans vieillissement



Propriétés : *La durée de vie d'un appareil est dite sans vieillissement si la probabilité qu'il fonctionne encore pendant une durée h* ***ne dépend que de h et pas de la durée t de son fonctionnement passé****.*
Autrement dit : sachant qu'on a déjà attendu un temps t, la probabilité d'attendre jusqu'à l'instant $t+h$ est la même que celle d'attendre un temps $\geqslant h$ en ne sachant rien du tout.

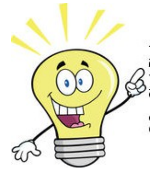
Si T est une va suivant une loi exponentielle alors, pour tous réels positifs *t* et *h,* on a :

$$P_{T>t}(T\geqslant t+h)=P(T\geqslant h)$$

Preuve

Savoir faire 5 p 327. *Vidéo :* **Y.Monka :** https://youtu.be/ZS_sW8yq-94

4. Espérance (ROC)



a. Définition (une extension de la formule vue pour la loi à densité).

L'espérance d'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ est définie par $\mathrm{E}(\mathrm{T})=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\,f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. Propriété (ROC) : L'espérance d'une variable aléatoire T suivant une loi de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$

Preuve : Il s'agit de calculer $E(T)=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\,f(x)\,\mathrm{d}x$

Étape n°1 : soit *g* la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=x\,f(x)=\lambda\,x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$

Il faut trouver une primitive G de g ; elle est de la forme $G(x)=(Ax+B)\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ où A et B sont deux réels. $G'(x)=A\,\mathrm{e}^{-\lambda x}+(Ax+B)\times((-\lambda)\,\mathrm{e})^{-\lambda x}=\mathrm{e}^{-\lambda x}\times(A-\lambda\,Ax-\lambda\,B)$

G est une primitive de g $\Leftrightarrow$ $G'(x)=g(x)$ pour tout réel $x\geqslant 0$, c'est-à-dire : $\lambda\,x=-\lambda\,Ax+A-\lambda\,B$

On a donc $A=-1$ et $B=-\dfrac{1}{\lambda}$ et $G(x)=\left(-x-\dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x}$

Étape n°2 : calculer $\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\,f(x)\,\mathrm{d}x$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=-\left(x+\dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x}$; F est une primitive de *f* donc

$\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(0)=\ldots=\dfrac{1}{\lambda}\times(-\lambda\,b\,\mathrm{e}^{-\lambda b}-\mathrm{e}^{-\lambda b}+1)$

Passage à la limite : $\lim_{b\to+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda b}=0$ et $\lim_{X\to-\infty}X\mathrm{e}^{X}=0$ avec $X=-\lambda\,b$ donc $E(T)=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\,f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\lambda}$.

Exercices : 61 à 67 p 338

Exercice 1 : Sujet Liban 2006

La durée de vie d'un robot exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda>0$. Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à : $\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant t)=\int_0^t\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer λ arrondi à 0,01 prés, pour que la probabilité P(X>6) soit égale à 0,3.
Dans la suite de l'exercice, on prendra λ = 0,2.

2. À quel instant *t* à un mois prés, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est de $\mathrm{e}^{-0,4}$.

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est à 0,01 près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

CORRECTIONS

Exercice n°1 : La durée de vie d'un robot exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, λ >0. Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à : $\mathrm{P}(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t$.

1. Déterminer λ arrondi à 0,01 prés, pour que la probabilité $\mathrm{P}(X > 6)$ soit égale à 0,3.

On sait que $P(T > a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$ donc $\mathrm{P}(X > 6) = 0{,}3 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-6\lambda} = 0{,}3 \Leftrightarrow -6\lambda = \ln(0{,}3) \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln(0{,}3)}{6} \approx 0{,}2$

Dans la suite de l'exercice, on prendra λ = 0,2.

2. À quel instant *t* à un mois prés, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

On cherche *t* tel que $\mathrm{P}(X \leqslant t) = 0{,}5$.

On sait que $P(T \leqslant b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b}$ donc $\mathrm{P}(X \leqslant t) = 0{,}5 \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-0{,}2 \times t} = 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}5 = \mathrm{e}^{-0{,}2t} \Leftrightarrow t = -\dfrac{\ln(0{,}5)}{0{,}2}$

On en déduit qu'au bout de 3ans et 5 mois, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est 0,5.

3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est de $\mathrm{e}^{-0{,}4}$.

On cherche $\mathrm{P}(X \geqslant 2)$. $\mathrm{P}(X \geqslant 2) = \mathrm{e}^{-0{,}2 \times 2} = \mathrm{e}^{-0{,}4}$

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est à 0,01 près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

On doit calculer $\mathrm{P}_{X>2}(X \geqslant 6)$. On sait que d'après la loi de vieillissement $P_{T>t}(T \geqslant t+h) = P(T \geqslant h)$

On a donc $\mathrm{P}_{X>2}(X \geqslant 2+4) = \mathrm{P}(X \geqslant 4) = \mathrm{e}^{-0{,}2 \times 4}$ = 0,45 à 0,01 près.

La probabilité que le robot soit encore en état de marche au bout de six ans est d'environ 45%.

10 **a.** $P(0{,}1 \leqslant T \leqslant 0{,}2) \approx 0{,}086$. **b.** $P(T \leqslant 1) \approx 0{,}632$. **c.** $P(T > 0{,}5) \approx 0{,}607$.

11 **1.** $P(1 \leqslant T \leqslant 3) \approx 0{,}164$. **2.** $P(T \leqslant 5) \approx 0{,}393$. **3.** $P(T > 10) \approx 0{,}368$. **4.** $E(T) = 10$.

12 **1.** $P_{T \geqslant t}(T \geqslant t+2) = P(T \geqslant 2) \approx 0{,}135$.
2. $P_{T \geqslant 2}(T \geqslant 2+t) = P(T \geqslant t) \approx \mathrm{e}^{-t}$.

13 $P_B(A) = P(X \geqslant 2) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368$.

14 Voir livre page 429.

15 **1.** La durée de vie moyenne de cet élément radioactif est de 33,33 siècles soit 3 333 ans.
2. Pour que $P(T < t)$ dépasse 0,5, on doit avoir $t > \dfrac{\ln 2}{0{,}03}$ soit t supérieur à 23,105.

61 **1.** La durée de vie moyenne d'un appareil de ce modèle est de 5 ans.
2. $P(X < 7) \approx 0{,}753$; $P(X > 7) \approx 0{,}247$ et $P(4 < X < 7) \approx 0{,}203$.
3. $P_{X>4}(X < 7) \approx 0{,}451$.

62 **1.** $\lambda = 1{,}63 \times 10^{-4}$.
2. Au bout de 4 265 heures environ, la moitié des agendas auront cessé de fonctionner.

63 **1.** $\lambda = 10^{-5}$.
2. $P(X > 90\,000) \approx 0{,}407$.
3. $P_{X>90\,000}(X > 110\,000) = P(X > 20\,000) \approx 0{,}819$.

64 **1.** $P(X > 10) = \mathrm{e}^{-10\lambda}$.
Donc $P(X > 10) = 0{,}286$ équivaut à $\mathrm{e}^{-10\lambda} = 0{,}286$.
On en déduit $\lambda = \dfrac{-\ln(0{,}286)}{10} \approx 0{,}125$.
2. $P(X < 6) \approx 0{,}528$.
La probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois est à 10^{-3} près de 0,528.
3. $P_{X>8}(X > 10) = P_{X>8}(X > 8+2) = P(X > 2) \approx 0{,}779$.
Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné 8 ans, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans est à 10^{-3} près de 0,779.

65 Voir livre page 429.

66 **1. a.** $P(5 < T < 10) = \frac{1}{4}$ équivaut à $\mathrm{e}^{-5\lambda} - \mathrm{e}^{-10\lambda} = \frac{1}{4}$ soit à :
$$\mathrm{e}^{-10\lambda} - \mathrm{e}^{-5\lambda} + \frac{1}{4} = 0.$$
b. On pose $X = \mathrm{e}^{-5\lambda}$. On résout $X^2 - X + \frac{1}{4} = 0$.
On trouve une solution : $X_0 = \frac{1}{2}$. On en déduit $\lambda = \frac{\ln 2}{5}$.
2. a. $E(T) \approx 7$ heures et 9 minutes. Ce nombre représente la durée moyenne séparant deux pannes informatiques.
b. $P(T > 5) \approx 0{,}497$.
c. $P_{T>4}(T > 9) = P(T > 5) \approx 0{,}497$.

67 **1.** La durée de vie moyenne d'un composant est de 700 jours.
2. $P(T > 120) \approx 0{,}842$.
3. $P(T > 730) \approx 0{,}352$.
4. $P_{T>730}(T > 1\,826) = P(T > 1\,096) \approx 0{,}209$.
5. On aura 10 % des composants en panne au bout de 74 jours.
6. $P(T_A > 300 \cap T_B > 300) = P(T_A > 300) \times P(T_B > 300) \approx 0{,}424$.