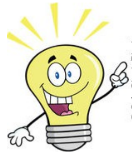
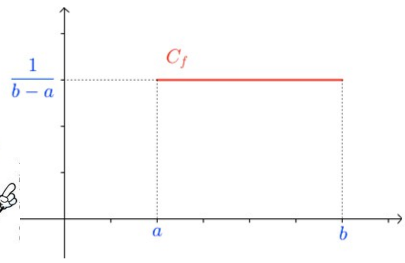
Loi continue : Partie II
Loi uniforme sur [*a* ; *b*]

II - Loi uniforme sur [*a* ; *b*]

Définition : Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
La **loi uniforme** sur $[a\ ;\ b]$, notée $\mathscr{U}([a\ ;\ b])$, est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction constante f définie sur $[a\ ;\ b]$
par : $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$.

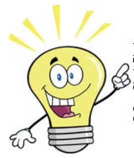




Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$.
- Pour tout réel x *et* y de $[a\ ;\ b]$, on a $P(x < X < y)=(y-x)\times\dfrac{1}{b-a}=\dfrac{y-x}{b-a}$

C'est *l'aire du rectangle* de dimensions $(y-x)$ et $(b-a)$.

- L'espérance de X est $E(X)=\dfrac{b+a}{2}$. *Preuve page 324*



Aucune formule à apprendre par cœur, on calcule l'aire d'un rectangle...

Quand utiliser la loi uniforme ?

Lorsque X est susceptible de prendre pour valeurs tous les réels d'un intervalle I, des indices peuvent orienter vers la loi uniforme : *I doit être un intervalle borné et la probabilité d'avoir X dans [u ; u+h] ne doit pas dépendre du positionnement de u dans I mais seulement de la longueur h de l'intervalle.*

Quand on choisit un **nombre au hasard** entre a et b.

Par exemple, Julie doit arriver entre 13h et 15h.
Cela, revient à choisir un nombre au hasard entre 13 et 15.
On modélise cette situation par la loi uniforme sur [13;15] de densité constante $\frac{1}{2}$.

Source : Site jaicompris.com

Exemple 1 : Caroline a dit qu'elle passerait voir Julien à un moment quelconque entre 18h30 et 20h45.
Quelle est la probabilité qu'elle arrive pendant le feuilleton préféré de Julien qui dure de 19h à 19h30 ?

Soit X la variable aléatoire égale à l'heure d'arrivée de Caroline chez Julien.
X prend ses valeurs dans l'intervalle [18,5 ; 20,75]
X suit la loi uniforme sur [18,5 ; 20,75], la fonction de densité est la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{2{,}25}$

donc $P(19\leqslant X\leqslant 19{,}5) = \dfrac{1}{2{,}25}\times(19{,}5-19) \approx 0{,}22$.

La probabilité que Caroline arrive pendant le feuilleton est d'environ 0,22.

Exercice 1 : On considère que le temps d'attente T à un guichet, en minutes, est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;20]$.

1. Déterminer la probabilité qu'une personne arrivant au guichet attende entre cinq minutes et un quart d'heure à ce guichet.

2. Déterminer la probabilité qu'une personne attende plus d'un quart d'heure à ce guichet.

3. Sachant que Marion a déjà attendu 10 minutes à ce guichet (sans être servie), quelle est la probabilité qu'elle attende encore au moins 5 minutes ?

4. Déterminer le temps d'attente moyen que peut espérer une personne arrivant à ce guichet.

Savoir faire 2 page 325 - Exercice 51 page 337

Vidéo (Y. Monka) : https://youtu.be/yk4ni_iqxKk

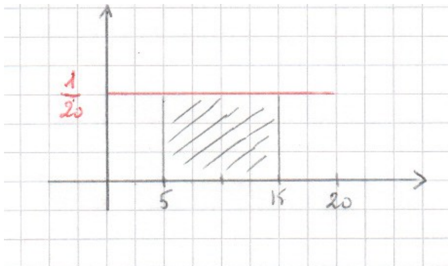
Vidéo (Loi uniforme) : Site *J'aicompris* (cours bien résumé, bien illustré avec des exemples corrigés) :
http://www.jaicompris.com/lycee/math/probabilite/loi-uniforme.php

Exercices 6 à 9 page 334 et 47 ; 48 ; 49 ; 52 ; 53 ; 59 ; 60 page 337

Obligez-vous systématiquement à : ***écrire la loi de densité et faire un schéma à main levée.***

CORRECTIONS

Exercice 1 : On considère que le temps d'attente T à un guichet, en minutes, est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;20]$ donc la fonction de densité *f* est définie par $f(x)=\frac{1}{20}$.



1. La probabilité qu'une personne arrivant au guichet attende entre cinq minutes et un quart d'heure à ce guichet est 0,5 :

$P(5<X<15)=\frac{1}{20}\times 10=0{,}5$.

2. La probabilité qu'une personne attende plus d'un quart d'heure à ce guichet est 0,25.

$P(X>15)=\frac{1}{20}\times 5=\frac{1}{4}$.

3. Sachant que Marion a déjà attendu 10 minutes à ce guichet sans être servie, la probabilité qu'elle attende encore au moins 5 minutes est 0,5.

Événement A : « Attendre au moins 15' » et Événement B : « Attendre au moins 10' ».

On cherche $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ avec $P(A\cap B)=P(10<X<15)=\frac{1}{20}\times 5=\frac{1}{4}$ et

$P(B)=P(X\geqslant 10)=P(10<X<20)=\frac{1}{20}\times 10=\frac{1}{2}$.

4. Le temps d'attente moyen que peut espérer une personne arrivant à ce guichet est de 10 minutes.

$E(X)=\frac{20}{2}=10$.

6 $P(X<0{,}2)=0{,}2$ et $P\left(X>\frac{3}{7}\right)=\frac{4}{7}$. **7** Voir livre page 429. **8** **1.** $P(A)=\frac{15}{18}$ et $P(A\cap B)=\frac{7}{18}$. **2.** $P_A(B)=\frac{7}{15}$. **9** **1.** La probabilité pour que le temps d'attente de Lisa avant la sonnerie soit compris entre 5 et 10 minutes est $\frac{1}{3}$. **2.** Le temps moyen d'attente de Lisa avant la sonnerie est de 12,5 minutes.	n°6 : $f(x)=1$ n°7 : $f(x)=0{,}1$ n°8 : $f(x)=\frac{1}{18}$ n°9 $f(x)=\frac{1}{15}$
47 **1.** $P(X<10)=\frac{2}{3}$. **2.** $P(X>0{,}5)=\frac{29}{30}$. **3.** Le temps moyen d'attente est de 7 minutes et 30 secondes.	$f(x)=\frac{1}{15}$
48 **1. a.** $P(A)=0{,}4$. **b.** $P(B)=0{,}079$. **c.** $P(C)=0$. **d.** $P(D)=0{,}92$. **e.** $P(E)=\frac{4}{7}$. **f.** $P(F)=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}707$. **2.** $k=0{,}28$.	$f(x)=1$ $P(X>k)=(1-k)\times 1$

49 **1.** f est définie sur [12 ; 20] par $f(x) = \frac{1}{8}$. **2. a.** $P(A) = \frac{3}{8}$. **b.** $P(B) = \frac{3}{8}$. **c.** $P(C) = \frac{5}{8}$. **d.** $P(D) = \frac{19}{40}$. **3.** $k = 14$. **4.** $t = 16{,}64$. **5.** $E(X) = 16$.	$f(x)=\frac{1}{8}$ $P(X<k)=(k-12)\times\frac{1}{8}$ et $P(X>t)=\frac{1}{8}\times(20-t)$
52 $a = 8$ et $E(X) = 18$.	$f(x)=\frac{1}{28-a}$ et $P(X>16)=\frac{1}{28-a}\times 12$
53 X suit la loi uniforme sur $[a ; b]$. On a : $P(X<3) = \frac{3-a}{b-a}$ et $P(X<4) = \frac{4-a}{b-a}$. D'où $\frac{3-a}{b-a} = 0{,}2$ et $\frac{4-a}{b-a} = 0{,}4$. On en déduit $a = 2$ et $b = 7$.	$f(x)=\frac{1}{b-a}$ $P(x<3)=\frac{1}{b-a}\times(3-a)$ …
59 VRAI car $E(X) = \frac{-1+1}{2} = 0$. **60** VRAI car $P(X<75) = \frac{75}{100} = 0{,}75$ et $P(X>25) = 1 - P(X \leqslant 25) = 1 - \frac{25}{100} = 0{,}75$.	N°59 : $f(x)=0{,}5$ N°60 : $f(x)=0{,}01$