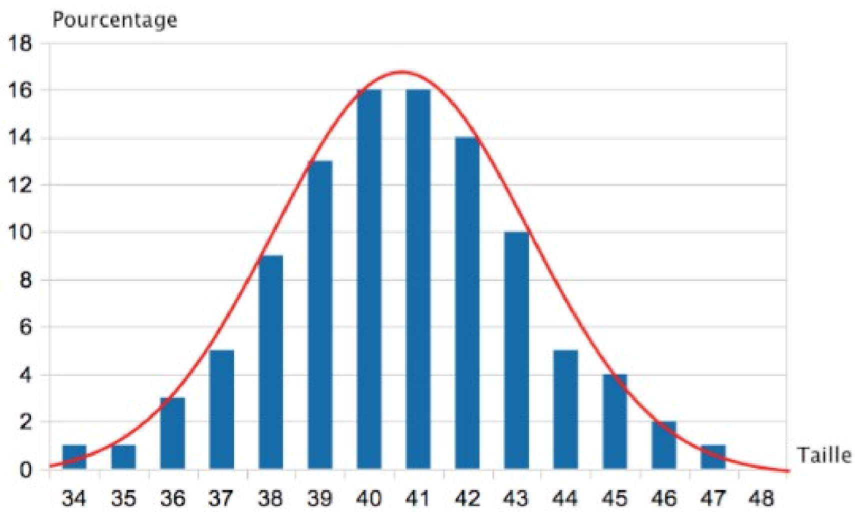
Lois continues : Partie I
Fonction de densité

Les lois étudiées jusqu'à présent (Bernouilli, binomiale) sont des lois « discrètes » : les variables aléatoires prennent un nombre fini de valeurs : on les appelle des *variables aléatoires discrètes*. Dans ce chapitre, on s'intéresse à des lois « continues », c'est-à dire pour lesquelles la variable aléatoire peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle, on les appelle lois à densité.

Exemple 1 (extrait du site de Y. Monka)
Un site de vente en ligne de vêtements établit le bilan des ventes par âge en années de ses clients de la semaine. L'histogramme ci-dessous résume ce bilan.



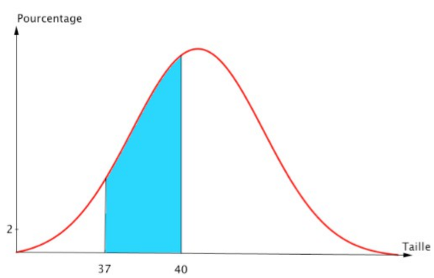
Du discret...
On désigne par X la variable aléatoire qui donne l'âge d'un client connecté.
X prend ses valeurs dans l'ensemble {34 ; 35 ; 36 ; ... ; 47 ; 48}
On a par exemple : $P(X=40)=0,16$ et $P(X=45)=0,04$. On a encore : $P(37 \leqslant X \leqslant 40)=0,43$.

... au continu
En fait, dans sa base de donnée, le site connait la date de naissance des clients donc leur âge en années, mois, jours, heures,... Ces données permettent de tracer la courbe rouge plus détaillée que l'histogramme.
La fonction correspondant à cette courbe est appelée fonction de densité.
La variable aléatoire Y qui donne l'âge (années, mois, jours, heures,...) des clients prend ses valeurs dans l'intervalle [34 ; 48]. Dans cette situation, la probabilité qu'un client ait un âge donné (38 ans, 3 mois, 4 jours, 5 heures, 12 minutes, 5 secondes...) est nulle.

Quel que soit *a*, $P(Y=a)=0$

Une telle variable aléatoire est dite **continue**, sa loi de probabilité n'est pas associée à la probabilité **d'une** de ses valeurs mais à la probabilité d'un **intervalle** inclus dans [34 ; 48].

La probabilité $P(37 \leqslant Y \leqslant 40)$ correspond à l'aire sous la courbe de la fonction *f* entre les droites d'équation $x=37$ et $x=40$.
$P(37 \leqslant Y \leqslant 40)=\int_{37}^{40} f(x)\,dx$.

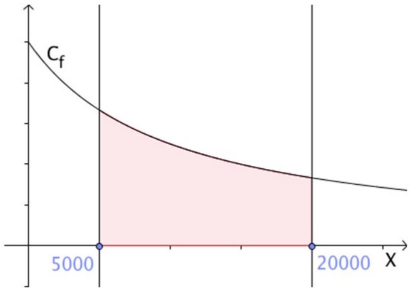


Exemple 2

Une entreprise fabrique des disques durs.
On définit une variable aléatoire X qui, à chaque disque dur, associe sa durée de vie en heures. Cette durée n'est pas nécessairement un nombre entier et peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle [0 ; + ∞[.
X est une variable aléatoire continue.

On pourra calculer par exemple $P(5000 \leqslant X \leqslant 20\,000)$ correspondant à la probabilité que la durée de vie d'un disque dur soit comprise entre 5 000 heures et 20 000 heures.

Ou $P(X > 7000)$ correspondant à la probabilité que la durée de vie d'un disque dur soit supérieure à 7000 heures.



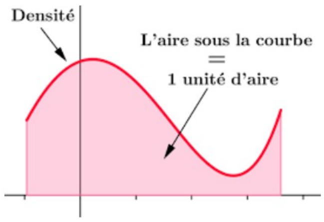
La probabilité $P(5\,000 \leqslant X \leqslant 20\,000)$ est l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction de densité et les droites d'équation $x=5000$ et $x=20000$.

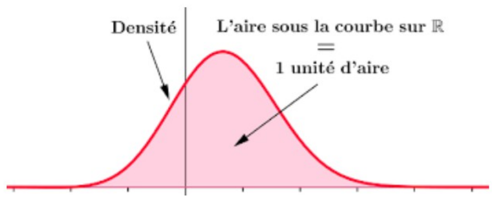
$$P(5\,000 \leqslant X \leqslant 20\,000) = \int_{5000}^{20000} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ainsi, la loi de probabilité (la répartition des probabilités) est donné par la fonction de densité (et non plus par un tableau de probabilités).

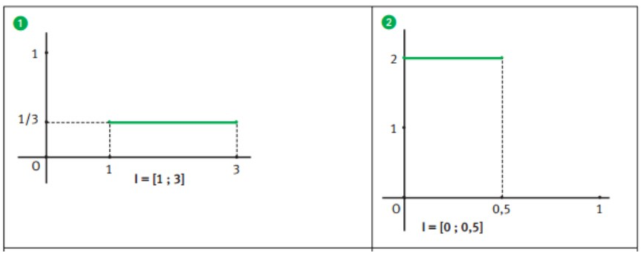
Définition : Une **fonction de densité** ou **densité** est une fonction :
définie, continue et positive sur un intervalle I de ℝ telle que **l'intégrale de *f* sur I est égale à 1.**

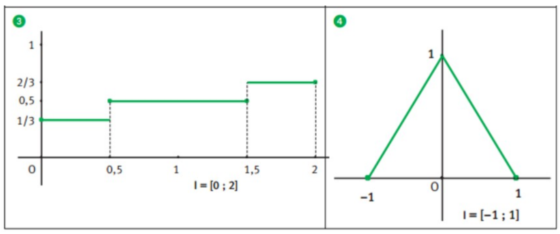
Deux exemples de fonctions de densité :





Exercice 1 : Pour chacune des fonctions représentées graphiquement ci-dessous, dire s'il s'agit d'une densité de probabilité sur l'intervalle I en justifiant votre réponse.

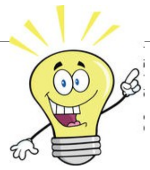




Propriété : Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité *f* sur un intervalle I.

- Si $J \subset I$ alors la probabilité $P(X \in J)$ est égale à l'aire sous la courbe de *f* sur l'intervalle J.
- $P(X=a)=0$
- On peut remplacer des inégalités larges par des inégalités strictes et réciproquement :
  $P(X \leqslant a) = P(X < a)$
- $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a)$

Espérance mathématique



Définition : Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité *f* sur l'intervalle $[a\,;b]$. L'espérance mathématique de X est le réel défini par $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\int_a^b x\times f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 : On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur [0;5] est représentée ci-dessous :

Déterminer :

a) $\mathrm{P}(0\leqslant \mathrm{X}\leqslant 2)$

b) $\mathrm{P}(3<\mathrm{X}<4)$

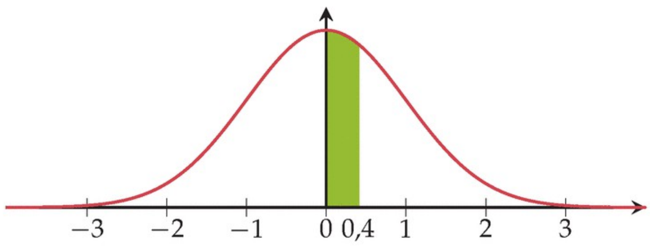
c) $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)$

d) $\mathrm{P}(\mathrm{X}>3)$

Exercice 3 : On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $\mathbb{R}$ est représentée ci-dessous. On admet que la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que $\mathrm{P}(0\leqslant \mathrm{X}\leqslant 0{,}4)=0{,}155$.

Déterminer :

a) $\mathrm{P}(-0{,}4<\mathrm{X}\leqslant 0)$
b) $\mathrm{P}(\mathrm{X}<0)$
c) $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant 0{,}4)$
d) $\mathrm{P}(-0{,}4\leqslant \mathrm{X}\leqslant 0{,}4)$



Savoir-faire n°1 page 325

Vidéo (Y.Monka) : https://youtu.be/0Ry-2yLsANA

Vidéo (Y.Monka) , Calcul de l'espérance : https://youtu.be/oI-tbf9sP6M

Exercices 1 à 5 page 334 ; 37 à 40 p 336 ; 42 ; 44 ; 45 page 337

CORRECTIONS

Exercice 1

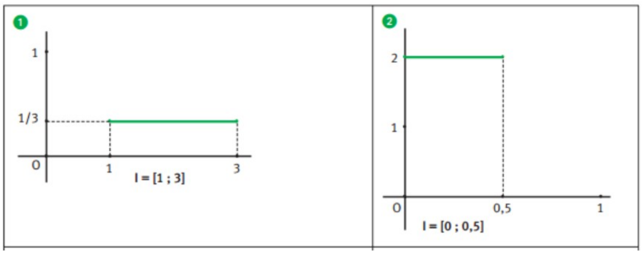
1) $f(x)=\frac{1}{3}$ f est positive et continue sur [1;3] et $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ (aire du rectangle de dimensions 2 et $\frac{1}{3}$). f n'est pas une fonction de densité.

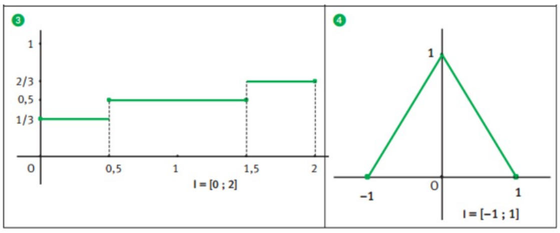
2) $f(x)=2$ f est positive et continue sur $[0;0,5]$ et $\int_0^{0,5} f(x)\,\mathrm{d}x=0,5\times 2=1$ aire du rectangle de dimensions 2 et 0,5. f est une fonction de densité.

3) f n'est pas continue sur [0;2] donc f n'est pas une fonction de densité.

4) f est positive et continue sur [-1;1] et $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=2\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times 1\right)=1$.

f est une fonction de densité.





Exercice 2 :

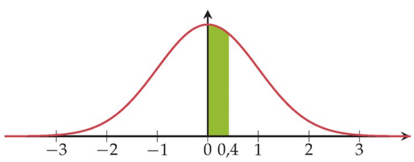
d

a) $P(0\leqslant X\leqslant 2)=\frac{1}{2}\times 2\times 0,25=0,25$ aire d'un triangle

b) $P(3<X<4)=1\times 0,25=0,25$ aire d'un rectangle

c) $P(X=2)=0$

Exercice 3 : On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $\mathbb{R}$ est représentée ci-dessous. On admet que la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que $P(0\leqslant X\leqslant 0{,}4)=0{,}155$.



a) $P(-0{,}4<X\leqslant 0)=P(0\leqslant X\leqslant 0{,}4)=0{,}155$

b) $P(X<0)=P(X>0)=0,5$

c) $P(X\geqslant 0,4)=0,5-P(0\leqslant X\leqslant 0{,}4)=0,5-0{,}155=0{,}345$

d) $P(-0{,}4\leqslant X\leqslant 0,4)=2\times P(0\leqslant X\leqslant 0{,}4)=2\times 0{,}1550=0{,}31$

1 **a.** $P(X = 5) = 0$. **b.** $P(X \leqslant 5) = 0{,}6$.
c. $P(X > 5) = 0{,}4$. **d.** $P(5 < X < 10) = 0{,}4$.

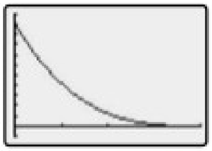
2 **a.** $P(X > 4) = 0{,}8$. **b.** $P(X > 11) = 0$.
c. $P(X < 7) = 0{,}5$. **d.** $P(4 < X < 7) = 0{,}3$.

3 Voir livre page 429.

4 **a.** $P(X > 0) = 1$. **b.** $P(0 < X < 1) = 0{,}5$.
c. $P(1 \leqslant X \leqslant 3) = 0{,}5$. **d.** $P(X < 0{,}6) = 0{,}3$.
e. $P(X > 0{,}5) = 0{,}75$.

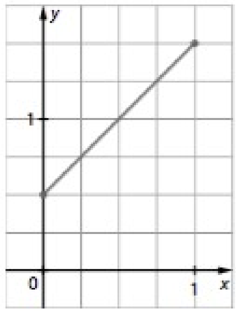
5 **a.** $P(X \leqslant 0) = 0{,}5$. **b.** $P(X < -0{,}5) = 0{,}125$.
c. $P(X > 0{,}5) = 0{,}125$. **d.** $P(-0{,}5 < X < 0{,}5) = 0{,}75$.

42 **1.**



2. a. $\int_0^4 f(x)\,dx = 1$. **b.** $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{175}{256}$.
c. $\int_1^3 f(x)\,dx = \frac{5}{16}$.
3. a. La fonction f est continue et positive sur $[0 ; 4]$.
De plus $\int_0^4 f(x)\,dx = 1$, donc f est bien une densité de probabilité.
b. $P(0 \leqslant X \leqslant 4) = 1$, $P(0 \leqslant X \leqslant 1) = \frac{175}{256}$ et
$P(1 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{5}{16}$.
4. a. $P(A) = \frac{81}{256}$ et $P(B) = \frac{255}{256}$.
b. $P_A(B) = \frac{80}{81}$.
5. $E(X) = \int_0^4 x f(x)\,dx = 0{,}8$.

37 **1. a.**



b. f est une fonction continue et positive sur $[0 ; 1]$.
De plus $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ donc f est une densité de probabilité sur $[0 ; 1]$.
2. a. $P(X < 0{,}25) = \frac{5}{32} \approx 0{,}156$.
b. $P\left(X > \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{9} \approx 0{,}778$.
c. $P(0{,}1 < X < 0{,}7) = 0{,}54$.
d. $E(X) = \int_0^1 x f(x)\,dx = \frac{7}{12} \approx 0{,}583$.

44 FAUX, car f est négative sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

45 VRAI car f est continue et positive sur $[-1 ; 1]$ et :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1.$$