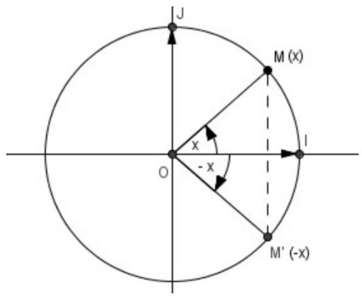
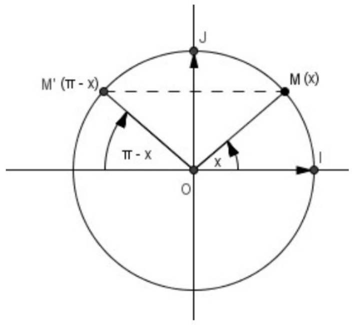
Fonctions Trigonométriques - Partie 1
Équations et inéquations trigonométriques

Compétence : Étudier le signe d'une expression trigonométrique	*7 page 83 et 98 page 89*

1. Équations trigonométriques

On cherche à se ramener à une équation de la forme sin (α)=sin (β) ou cos (α)=cos (β) .
Il faut penser à utiliser le cercle trigonométrique .

Équation	$\cos x = \cos a$	$\sin x = \sin a$
Représentation graphique		
Interprétation	$\begin{cases} M \text{ et } M' \text{ ont même abscisse} \\ \cos a = \cos x \text{ ou } \cos a = \cos(-x) \end{cases}$	$\begin{cases} M \text{ et } M' \text{ ont même ordonnée} \\ \sin a = \sin x \text{ ou } \sin a = \sin(\pi - x) \end{cases}$
Solutions :	L'équation $\cos x = \cos a$ a pour solutions les nombres réels $x = a\ [2\pi]$ et $x = -a\ [2\pi]$.	L'équation $\sin x = \sin a$ a pour solutions les nombres réels $x = a\ [2\pi]$ et $x = \pi - a\ [2\pi]$.

Exemple 1 : L'équation $\cos x = \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ dans $]-\pi ; \pi]$ a pour solutions $\frac{-\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.

L'équation $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ dans $[0 ; 2\pi[$ a pour solution : $\cos x = \cos \frac{5\pi}{6}$ donc $x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$.

Exemple 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\cos x)^2 = \frac{1}{2}$.

Vidéo https://youtu.be/PcgvyxU5FCc

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \text{ ou } \cos x = \cos \frac{3\pi}{4}$$

Ainsi : $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi ; -\frac{\pi}{4} + 2k_2\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k_3\pi ; -\frac{3\pi}{4} + 2k_4\pi \right\}$ *avec* $k_i \in \mathbb{Z}$

Soit : $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

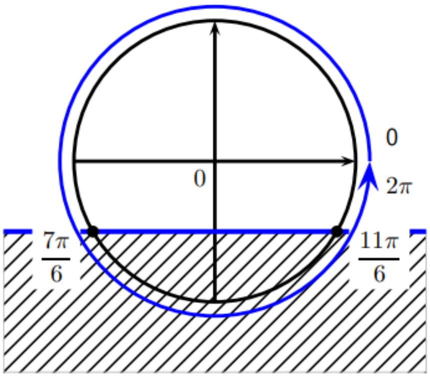
Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle sur $\mathbb{R}$, puis représenter les solutions sur le cercle unité :

1) $2 \sin x + 1 = 0$
2) $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$
3) $\cos(2x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
4) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
5) $4 \cos^2 x - 1 = 0$
6) $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

b. Inéquations trigonométriques

Exemple 3 : Résoudre, dans l'intervalle [0; 2π[l'inéquation $\sin x > -\frac{1}{2}$.

On commence par chercher une valeur simple pour laquelle $\sin x = -\frac{1}{2}$, ici on prendra $x = -\frac{\pi}{6}$.
On trace un cercle trigonométrique pour retrouver les autres valeurs sur la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point correspondant à $-\frac{\pi}{6}$.
Attention on travaille sur l'intervalle $[0; 2\pi[$, les valeurs retenues seront donc $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$.

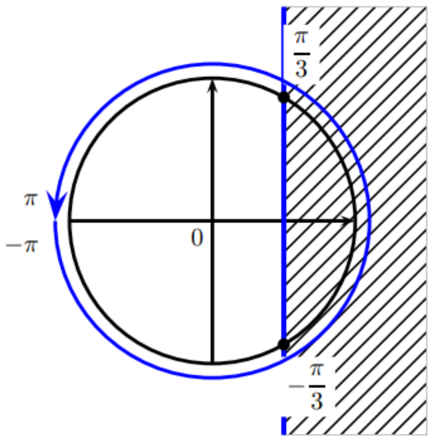


Les valeurs pour lesquelles $\sin x > -\frac{1}{2}$ sont les valeurs situées au dessus de la droite horizontales.

$$S=\left[0; \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right[$$

Exemple 4 : Résoudre, dans l'intervalle [−π; π[l'inéquation $\cos x < \frac{1}{2}$.

On commence par chercher une valeur simple pour laquelle $\cos x = \frac{1}{2}$, ici on prendra $x = \frac{\pi}{3}$.
On trace un cercle trigonométrique pour retrouver les autres valeurs sur la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point correspondant à $\frac{\pi}{3}$.
Attention on travaille sur l'intervalle $[-\pi; \pi[$, les valeurs retenues seront donc $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.



Les valeurs pour lesquelles $\cos x < \frac{1}{2}$ sont les valeurs situées à gauche de la droite verticale.

$$S=\left[-\pi; -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}; \pi\right[$$

Exercice 2 : Résoudre les inéquations suivantes sur $I =]-\pi;\pi]$ et sur $J = [0;2\pi[$

1) $2\sin x + \sqrt{2} < 0$
2) $2\cos x - \sqrt{3} \leqslant 0$
3) $2\sin x + 1 \geqslant 0$
4) $\sqrt{2}\cos x > 1$

Exercice 3 : Résoudre dans $]-\pi;\pi]$:

1) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x$
2) $4\sin^2 x - 3 \leqslant 0$
3) $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$
4) $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 \leqslant 0$

3. Des formules à connaitre

Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

Formules de duplication

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Formules de linéarisation

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \quad \sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Formules de factorisation

$$1 + \cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad 1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

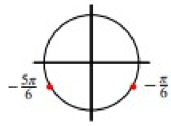
Exercices 100 et 102 page 89

Un autre cours en vidéo Mathrix : https://www.youtube.com/watch?v=OnBW3Rl2ipc
Une carte mentale (site Rallymaths.fr) : : http://rallymaths.free.fr/terminale/TS_CM_TRIGO.pdf

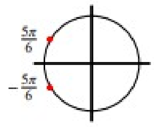
CORRECTION

Exercice 1 :

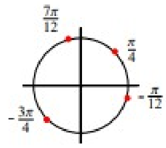
1) $\sin x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$



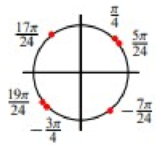
2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$



3) $\cos(2x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

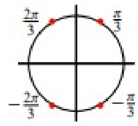


4) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$



5) $4\cos^2 x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \pm\frac{1}{2}$

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad$ ou $\quad \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

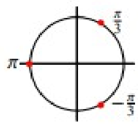


6) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ on pose $X = \cos x$ avec $-1 \leqslant X \leqslant 1$,

l'équation devient : $2X^2 + X - 1 = 0 \quad \Delta = 9 = 3^2$ d'où $X_1 = \frac{1}{2}$ ou $X_2 = -1$

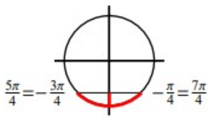
On revient à x : $\cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = -1$

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad$ ou $\quad x = \pi + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$



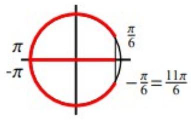
Exercice 2 :

1) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$



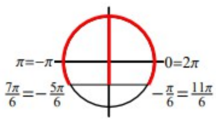
$S_I = \left]-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right[; \quad S_J = \left]\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right[$

2) $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$



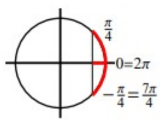
$S_I = \left[-\pi; -\frac{\pi}{6}\right[\cup \left[\frac{\pi}{6}; \pi\right] ; \quad S_J = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$

3) $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$



$S_I = \left[-\pi; -\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left[-\frac{\pi}{6}; \pi\right] ; \quad S_J = \left[0; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right[$

4) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$



$S_I = \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[; \quad S_J = \left]0; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right[$

Exercice 3 :

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$:

1) voir cours

2) $4\sin^2 x - 3 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2\sin^2 x - \sqrt{3})(2\sin^2 x + \sqrt{3}) \leqslant 0$

On cherche les valeurs qui annulent les facteurs dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$. On pose $f(x) = 4\sin^2 x - 3$

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}$$

$$2\sin x + \sqrt{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3}$$

On peut remplir le tableau de signes suivant :

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2\sin x - \sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$2\sin x + \sqrt{3}$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On obtient la solution : $S = \left]-\pi;-\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$

3) On pose $X = \cos x$ avec $-1 \leqslant X \leqslant 1$, l'équation devient :

$2X^2 - 3X - 2 = 0$, on calcule $\Delta = 25 = 5^2$ on obtient $X_1 = 2$ (impossible) et $X_2 = -\frac{1}{2}$

On revient à x : $\cos x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = -\frac{2\pi}{3}$

4) D'après 3), on peut en déduire le tableau de signes en X

X	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$2X^{-}3X - 2$		$+$	0	$-$	

On veut $X \geqslant -\frac{1}{2}$ alors $S = \left[-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$

100 $\sin(2x) - \cos(x) = \cos x\,(2\sin x - 1)$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$\cos x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$2\sin x - 1$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
Produit	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	‖
$2\sin x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	‖
Produit		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	‖

102 **1.** Les solutions de l'équation $2X^2 - X - 1 = 0$ sont $-0{,}5$ et 1.

2. a. $\cos(2x) = \cos x$ équivaut à $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x$ et donc à $2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$.

b. D'après la question **1**, $2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$ équivaut à $\cos x = -0{,}5$ ou $\cos x = 1$.

Sur $[0\,;2\pi[$, **(E)** a pour solutions $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$ et 0.

3. a. $P(X) = 2X^2 - X - 1 = (2X + 1)(X - 1)$.

b. $\cos(2x) - \cos(x) = 2\cos^2(x) - \cos(x) - 1$

donc $\cos(2x) - \cos(x) = (2\cos x + 1)(\cos x - 1)$.

c.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$\cos x - 1$	0	$-$		$-$		$-$	‖
$2\cos x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖
Produit	0	$-$	0	$+$	0	$-$	‖