Fonctions Trigonométriques - Partie 2
Les fonctions sinus et cosinus

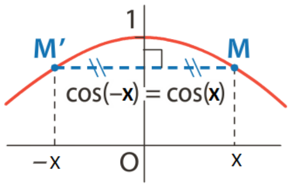
Compétences	*Exercices corrigés*
Calculer la dérivée d'une fonction trigonométrique	4 page 81
Utiliser la parité et la périodicité d'une fonction	Application 1 et 5 page 81

I - La fonction cosinus

a. Définition

La fonction qui à tout réel x, associe le réel cos(x) est appelée fonction cosinus : cos : $x \to \cos(x)$.

b. Propriétés



- Pour tout réel x, **cos(-x) = cos(x)**.
On dit que la fonction cosinus est une **fonction paire**.
Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

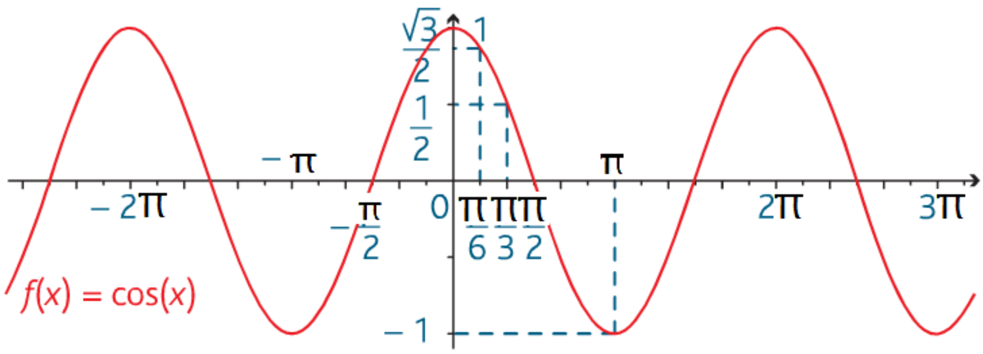
- Pour tout réel x, **cos(x) = cos(x + 2π).**
On dit que la fonction cosinus est **2π-périodique ou périodique de période 2π**.
Sa courbe représentative est donc invariante par translation de vecteur 2π ou -2π .

- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$

- Son tableau de variations :
La fonction étant 2π-périodique, on l'étudie sur un intervalle de longueur 2π , [- π ; π] par exemple

x	$-\pi$		0		π
$\cos' x = -\sin x$		$+$	0	$-$	
$\cos x$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

Sa courbe représentative : on la trace sur [- π ; π] puis on la complète par translation de vecteur 2π .

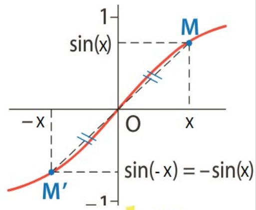


II - La fonction sinus

a. Définition

La fonction qui à tout réel x, associe le réel sin(x) est appelée fonction sinus : sin : $x \rightarrow \sin(x)$.

b. Propriétés



- Pour tout réel x, $\mathbf{\sin(-x) = -\sin(x)}$.
On dit que la fonction sinus est une **fonction impaire**.
Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

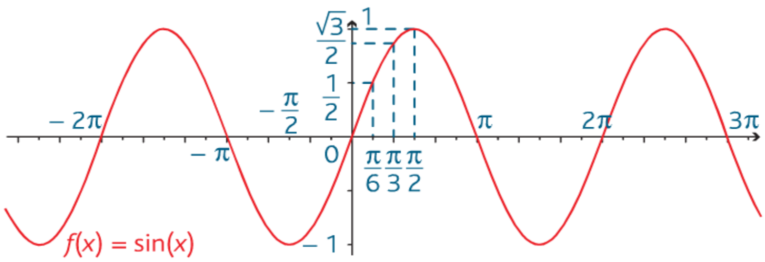
- Pour tout réel x, **sin(x) = sin(x + 2π).**
On dit que la fonction sinus est **2π-périodique ou périodique de période 2π**.
Sa courbe représentative est donc invariante par translation de vecteur 2π ou -2π .

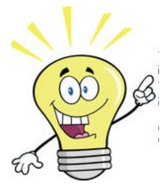
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$

- Son tableau de variations :
la fonction étant 2π-périodique, on l'étudie sur un intervalle de longueur 2π , [- π ; π] par exemple

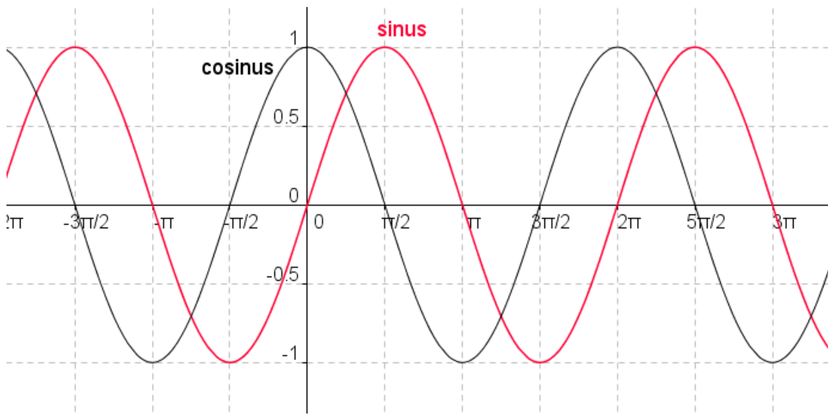
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x = \cos x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Sa courbe représentative : on la trace sur [- π ; π] puis on la complète par translation de vecteur 2π .





Les courbes des fonctions sinus et cosinus sur un même graphique :



Exercice 1 et Exercice 2

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

a. $f : x \longmapsto x^2 + \cos x$ b. $g : x \longmapsto \sin(2x)$

c. $h : x \longmapsto \cos x \cdot \sin x$ d. $j : x \longmapsto (\sin x)^2$

Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées aux fonctions suivantes :

a. $f(x) = x^2 \cdot \cos x$ b. $g(x) = (3x^2 - 2) \cdot (\sin x)^2$

c. $h(x) = \dfrac{3}{2 \cdot \cos x}$ d. $j(x) = \dfrac{\cos x}{3x + \sin x}$

Exercices 68 à 76 page 87

III - Parité et périodicité

Savoir faire 5 page 81

Exemple 1 : Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - \sin(2x)$.

a. Montrer que est impaire.

b. Montrer que cette fonction est 2π-périodique. **Vidéo** https://youtu.be/hrbgxnCZW_I

a. Pour tout réel *x*, on a $f(-x) = \sin(-x) - \sin(-2x) = -\sin x - \sin(2x) = -f(x)$ donc *f* est impaire.

b. $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) - \sin(2 \times (x+2\pi)) = \sin(x+2\pi) - \sin(2x+4\pi) = \sin(x) - \sin(2x) = f(x)$ donc *f* est 2π-périodique.

Bilan : *f* est 2π-périodique donc on peut restreindre son étude à l'intervalle [-π ; π].

f est impaire donc on peut restreindre son étude à l'intervalle [0 ; π].

Lorsqu'on aura tracé la portion de C_f sur [0 ; π], on complétera par symétrie centrale sur [-π ; π] puis par translation sur des intervalles de longueur 2π.

Exercice 3 :

Exercice 4 :

Pour chaque question, montrer que la fonction f admet T pour période :

a. $f(x) = \sin(6x - 3)$; $T = \dfrac{\pi}{3}$

b. $f(x) = \tan\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$; $T = \pi$

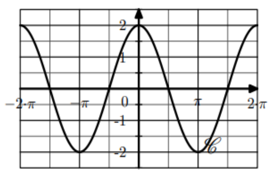
c. $f(x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$; $T = \pi$

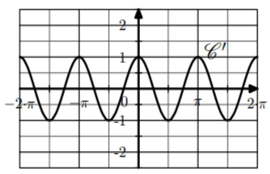
d. $f(x) = \left|\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)\right|$; $T = \dfrac{\pi}{2}$

On considère les deux fonctions suivantes f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2 \cdot \cos(x)$; $g(x) = \cos(2 \cdot x)$

Associer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative représentée ci-dessous :





Exercice 5 : On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$.

1. Justifier que *f* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. a. Montrer que *f* est 2π-périodique **b.** Montrer que *f* est impaire.

c. Sur quel intervalle suffit-il d'étudier la fonction *f* ?

3. Étudier les variations de *f* sur l'intervalle trouvé à la question 2 c)

4. Représenter graphiquement *f* sur l'intervalle [-2π; 2π].

Exercice 6 : On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - 0{,}5$

1. Étudier la parité de *f*. **2.** Montrer que *f* est π-périodique

3. a. Sur quel intervalle I suffit-il d'étudier la fonction *f* ?

b. Étudier les variations de *f* sur I.

4. Représenter graphiquement *f* sur I puis $\mathbb{R}$.

Exercice 7 : On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$.

1. Montrer que *f* est 2π-périodique. Sur quel intervalle suffit-il d'étudier la fonction *f* ?

2. Justifier que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel *x*, $f'(x) = -2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

3. En déduire le tableau de variation sur [0 ;2π].

Exercices 77 et 78 page 87

CORRECTIONS

Exercice 1

a. La fonction f admet pour dérivée :
$f'(x) = 2x + (-\sin x) = 2x - \sin x$

b. La fonction g est définie par la composée de la fonction u par la fonction sinus où :
$u(x) = 2x \quad ; \quad u'(x) = 2$

La formule de dérivation de la fonction sinus donne l'expression de la fonction g :
$g'(x) = u'(x) \cdot \cos\left[u(x)\right] = 2 \cdot \cos(2x)$

c. La fonction h est définie par le produit des fonctions u et v où :
$u(x) = \cos x \quad ; \quad v(x) = \sin x$
qui admettent pour dérivée les fonctions :
$u'(x) = -\sin x \quad ; \quad v'(x) = \cos x$
La formule de dérivation d'un produit donne l'expression de la fonction h' :

$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= (-\sin x) \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x \\ &= -\left(\sin x\right)^2 + \left(\cos x\right)^2 = \left(\cos x\right)^2 - \left(\sin x\right)^2 \end{aligned}$$

d. La fonction j est définie par le carré de la fonction u où :
$u(x) = \sin x \quad ; \quad u'(x) = \cos x$
La formule de dérivation de la puissance d'exposant 2 d'une fonction permet d'obtenir l'expression de la fonction j' :
$j'(x) = 2 \cdot u'(x) \cdot u(x) = 2 \cdot \cos x \cdot \sin x$

68 $f'(x) = -2\cos x + 2x\sin x$ et $g'(x) = 2x\sin x + x^2 \cos x$.

69 $f'(x) = \dfrac{-1}{(\sin x)^2}$ et $g'(x) = \dfrac{\sin x - (x+1)\cos x}{(\sin x)^2}$.

70 $f'(x) = \dfrac{-1 - 2\sin x}{(2 + \sin x)^2}$ et $g'(x) = \dfrac{4\sin x}{(2 + \cos x)^2}$.

71 Voir livre page 422.

72 $f'(x) = -6\sin(2x+5)$ et $g'(x) = 1 - 6\cos(3x)$.

73 **1.** Cette proposition est vraie d'après le cours.

2. La réciproque de cette proposition est :
« Si $f'(x) = \cos x$, alors $f(x) = \sin x$ ».
Cette proposition est fausse. Par exemple, f définie par $f(x) = \sin x + 1$ est telle que $f'(x) = \cos x$ mais $f(x) \neq \sin x$.

74 VRAI : $f(x) = \cos(-x) = \cos x$ donc $f'(x) = -\sin x$.

75 VRAI : $f'(x) = 2 \times 2(-\sin x)\cos x = -4\sin x \cos x$ et $g'(x) = 2 \times [-\sin(2x)] = -4\sin x \cos x$.

76 FAUX : comme $f(x) = 1 - g(x)$, $f'(x) = -g'(x)$.

Exercice 2

a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$u(x) = x^2 \quad ; \quad v(x) = \cos x$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 2x \quad ; \quad v'(x) = -\sin x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x) = 2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x \end{aligned}$$

b. L'expression de la fonction g est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$u(x) = 3x^2 - 2 \quad ; \quad v(x) = \left(\sin x\right)^2$
qui admettent pour dérivées :

- $u'(x) = 6x$
- La fonction v est le carré de la fonction sinus. Sa dérivée a pour expression :
  $v'(x) = 2 \cdot \cos x \cdot \sin x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction g' :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 6x \cdot \left(\sin x\right)^2 + (3x^2 - 2) \cdot 2 \cdot \cos x \cdot \sin x \end{aligned}$$

c. L'expression de la fonction h est définie par le quotient des fonctions u et v définies par :
$u(x) = 3 \quad ; \quad v(x) = 2 \cdot \cos x$
qui admettent pour dérivée :
$u(x) = 0 \quad ; \quad v'(x) = -2 \cdot \sin x$

la formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction h' :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{0 \times 2 \cdot \cos x - 3 \cdot (-2 \cdot \sin x)}{(2 \cdot \cos x)^2} = \frac{6 \cdot \sin x}{(2 \cdot \cos x)^2} \\ &= \frac{6 \cdot \sin x}{4 \cdot \left(\cos x\right)^2} = \frac{3 \cdot \sin x}{2 \cdot \left(\cos x\right)^2} \end{aligned}$$

d. La fonction j est définie par le quotient des fonctions u et v définies par :
$u(x) = \cos x \quad ; \quad v(x) = 3x + \sin x$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = -\sin x \quad ; \quad v'(x) = 3 + \cos x$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction j' :

$$\begin{aligned} j'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\ &= \frac{-\sin x \cdot (3x + \sin x) - \cos x \cdot (3 + \cos x)}{(3x + \sin x)^2} \\ &= \frac{-3x \cdot \sin x - \left(\sin x\right)^2 - 3\cos x - \left(\cos x\right)^2}{(3x + \sin x)^2} \\ &= \frac{-3x \cdot \sin x - 3\cos x - \left[(\cos x)^2 + (\sin x)^2\right]}{(3x + \sin x)^2} \\ &= \frac{-3x \cdot \sin x - 3\cos x - 1}{(3x + \sin x)^2} \end{aligned}$$

Exercice 3

a. Vérifions que $\frac{\pi}{3}$ est une période de la fonction f :

$$f\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left[6\cdot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-3\right]$$
$$= \sin\left(6\cdot x+2\pi-3\right) = \sin\left(6\cdot x-3+2\pi\right)$$
$$= \sin\left(6\cdot x-3\right) = f(x)$$

b. Vérifions que $T=\pi$ est une période de la fonction f :

$$f(x+\pi) = \tan\left[2\cdot(x+\pi)+\frac{\pi}{3}\right] = \tan\left(2\cdot x+2\cdot\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \tan\left(2\cdot x+\frac{\pi}{3}+2\cdot\pi\right) = \tan\left(2\cdot x+\frac{\pi}{3}\right) = f(x)$$

c. Vérifions que $T=\pi$ est une période de la fonction f :

$$f(x+\pi) = \left[\cos(x+\pi)\right]^2 - \left[\sin(x+\pi)\right]^2$$
$$= \left[-\cos(x)\right]^2 - \left[-\sin(x)\right]^2$$
$$= \left[\cos(x)\right]^2 - \left[\sin(x)\right]^2 = f(x)$$

d. Vérifions que $T=\frac{\pi}{2}$ a bien pour période $\frac{\pi}{2}$:

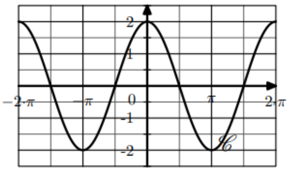
$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \left|\cos\left[2\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right]\right|$$
$$= \left|\cos\left(2\cdot x+\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right| = \left|\cos\left[\left(2\cdot x+\frac{\pi}{3}\right)+\pi\right]\right|$$
$$= \left|-\cos\left(2\cdot x+\frac{\pi}{3}\right)\right| = \left|\cos\left(2\cdot x+\frac{\pi}{3}\right)\right| = f(x)$$

Exercice 4

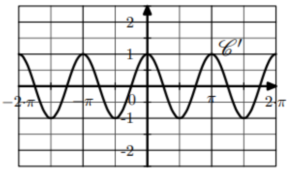
Pour choisir entre les deux représentations, il suffit de calculer l'image de 0 par chacune de ces fonctions :

- $f(0) = 2\cdot\cos(0) = 2\times 1 = 2$
- $g(0) = \cos(2\cdot 0) = \cos 0 = 1$

Voici l'association :



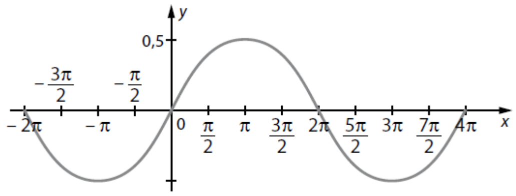
$f(x) = 2\cdot\cos(x)$



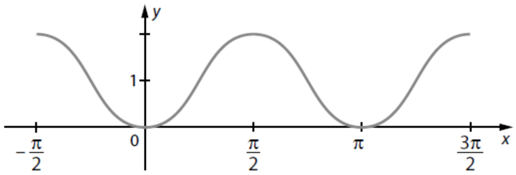
$g(x) = \cos(2\cdot x)$

Remarquer que la période de la fonction g est de π et celle de la fonction f est $2\cdot\pi$.

77 **2.** $f(-x) = -f(x)$: on complète $\mathscr{C}_f$ sur $[-2\pi\,;0]$ par symétrie par rapport à l'origine du repère.
3. $f(x + 4\pi) = 0{,}5\sin(0{,}5x + 2\pi) = f(x)$: on complète $\mathscr{C}_f$ par translation de vecteur $4\pi\vec{i}$.



78 **2.** $f(-x) = f(x)$: on complète $\mathscr{C}_f$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
3. $f(x + \pi) = 1 - \cos(2x + 2\pi) = f(x)$: on complète $\mathscr{C}_f$ par translation de vecteur $\pi\vec{i}$.



Exercice 5 :
La correction en vidéo : [ici]

Exercice 7 :
la correction en vidéo : [ici]

Exercice 6 :

1) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(-x)=\cos(-2x)-\frac{1}{2}=\cos(2x)-\frac{1}{2}=f(x)$

La fonction f est donc paire. Dans un repère orthogonal, sa représentation graphique est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$f(x+\pi)=\cos\left(2(x+\pi)\right)-\frac{1}{2}$$
$$=\cos(2x+2\pi)-\frac{1}{2}$$
$$=\cos(2x)-\frac{1}{2}=f(x)$$

On en déduit que la fonction f est périodique de période π.

3) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f'(x)=-2\sin(2x)$.

Si $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, alors $2x\in[0;\pi]$ et donc $\sin(2x)\geq 0$.

Donc si $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, alors $f'(x)\leq 0$. Ainsi f est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{3}{2}$