Fonctions Trigonométriques - Partie 3
Limites et intégration

I - Limites

Rappel : les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

Les théorèmes de comparaison et le théorème « des gendarmes » doivent être utilisés dans de nombreux cas.

On rappelle que pour tout x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

Limite de référence : $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ *preuve page 86*

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes :

1. a) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x}$ **b)** $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} x+\cos x$

2. a) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(2x)}{x}$ **b)** $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$ **c)** $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x+\sin(x)}{x}$ **d)** $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{x}$

Exercices 86 à 92 page 88

II – Intégrale et primitive : voir livre page 170 et savoir faire 5/6 page 171

Exercice 2

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ b. $g(x) = e^{x+1} + 1$

c. $h(x) = 2 \cdot x \cdot e^{x^2+1}$ d. $j(x) = \cos x$

e. $k(x) = \sin(3x)$ f. $\ell(x) = (\sin x)^2$

Exercice 3

On considère les deux intégrales suivantes :

$I = \displaystyle\int_0^{\pi} (\cos x)^2 \, dx$; $J = \displaystyle\int_0^{\pi} (\sin x)^2 \, dx$

1. Calculer : $I+J$; $I-J$.
2. En déduire les valeurs de I et de J.

Exercice 4

On considère la suite (x_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$x_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \cdot \cos t \, dt$

1. a. Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.
   b. Etudier les variations de la suite (x_n).
   c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :
   $x_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$
   b. En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice 5

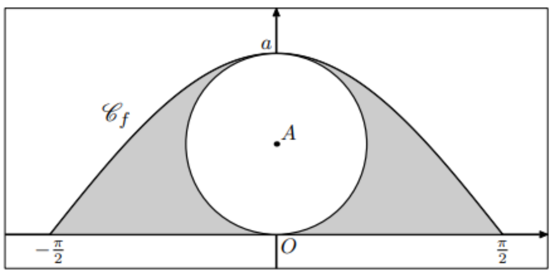
Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles.

Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.

La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = a \cdot \cos x$ avec $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ et a un réel strictement positif.

Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre le point A de coordonnées $\left(0 ; \frac{a}{2}\right)$ et de rayon $\frac{a}{2}$. On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe $\mathscr{C}$ pour des valeurs de a inférieurs à 1,4.

1. Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$, et la courbe $\mathscr{C}$ est égale à $2 \cdot a$ d'unité d'aire.
2. Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée. Quelle valeur faut-il donner au réel a pour respecter cette contrainte?

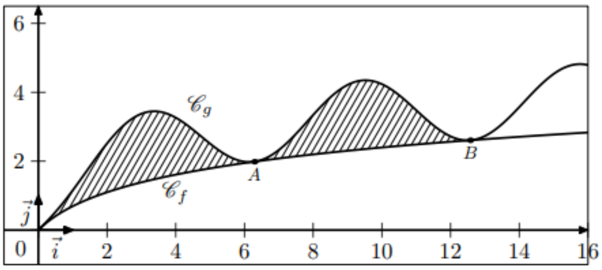


Exercice 6

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0;16]$ par :

$$f(x)=\ln(x+1) \quad ; \quad g(x)=\ln(x+1)+1-\cos(x)$$

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.
Ces courbes sont données ci-dessous :



Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

CORRECTIONS

Exercice 1 : correction en vidéo : ici

Exercice 2. : correction en vidéo : ici

87 Pour tout réel x, $-2-x \leqslant f(x) \leqslant 2-x$.
$f(x) \leqslant 2-x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
$-2-x \leqslant f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2-x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

88 **1.** Comme pour tout réel x, $-1\leqslant \cos x \leqslant 1$ et $x^2+1>0$:

$$\frac{-1}{x^2+1} \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{x^2+1}.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$. De même $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$.

89 Voir livre page 422.

90 **1.** $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, d'après le cours.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)=+\infty$.

Pour tout réel $x>0$, $-1\leqslant \sin\frac{1}{x}\leqslant 1$ donc $-x\leqslant h(x)\leqslant x$.

$\lim\limits_{x\to0}(-x)=\lim\limits_{x\to0} x=0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to0} h(x)=0$.

2. $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$: la courbe qui représente f est $\mathscr{C}_2$.

$\lim\limits_{x\to0} g(x)=+\infty$: la courbe qui représente g est $\mathscr{C}_3$.

$\lim\limits_{x\to0} h(x)=0$: la courbe qui représente h est $\mathscr{C}_1$.

3. a. D'après le graphique, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1$.

b. Pour tout réel $x>0$, $x\sin\frac{1}{x}=\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{X\to0}\frac{\sin X}{X}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1$.

91 FAUX : pour tout réel x, $x-1\leqslant x+\sin x$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin x)=+\infty$.

92 FAUX :

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\cos x=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x=0^-$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{\cos x}{x}=-\infty$.

Correction 2

1. La fonction f admet pour expression :
$f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} = 10\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Ainsi, la fonction f admet pour primitive la fonction F définie par :
$F(x) = 10\times\sqrt{x}$

2. Considérons la fonction u définie par :
$u(x) = x+1 \quad ; \quad u'(x) = 1$
La fonction g admet pour expression :
$g(x) = \mathrm{e}^{x+1}+1 = u'(x)\cdot\mathrm{e}^{u(x)}+1$
Ainsi, la fonction g admet pour primitive la fonction G dont l'expression est :
$G(x) = \mathrm{e}^{x+1}+x$

3. Considérons la fonction u définie par :
$u(x) = x^2+1 \quad ; \quad u'(x) = 2{\cdot}x$
La fonction h admet pour expression :
$h(x) = 2{\cdot}x{\cdot}\mathrm{e}^{x^2+1} = u'(x){\cdot}\mathrm{e}^{u(x)}$
Ainsi, la fonction h admet pour primitive la fonction H définie par :
$H(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$

4. La primitive de la fonction cosinus est la fonction sinus. Ainsi, la fonction j admet pour primitive la fonction J définie par :
$J(x) = \sin x$

5. Considérons la fonction u définie par :
$u(x) = 3x \quad ; \quad u'(x) = 3$
La fonction k admet pour expression :
$k(x) = \sin(3x) = \frac{1}{3}\times 3{\cdot}\sin(3x) = \frac{1}{3}\times u'(x){\cdot}\sin\big[u(x)\big]$
Ainsi, la fonction k admet pour primitive la fonction K qui admet pour expression :
$K(x) = \frac{1}{3}\times\Big[-\cos\big[u(x)\big]\Big] = -\frac{1}{3}{\cdot}\cos(3x)$

6. Considérons la fonction u définie par :
$u(x) = 2x \quad ; \quad u'(x) = 2$
La fonction m admet pour expression :
$$m(x) = \big(\sin x\big)^2 = \frac{1-\cos(2{\cdot}x)}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}{\cdot}\cos(2x)$$
$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times 2{\cdot}\cos(2x) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times u'(x){\cdot}\cos\big[u(x)\big]$$
Ainsi, la fonction m admet pour primitive la fonction M dont l'expression est :
$M(x) = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}{\cdot}\sin\big[u(x)\big] = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}{\cdot}\sin(2x)$

Correction 3

1. Calculons la somme :
$$I+J = \int_0^\pi \big(\cos x\big)^2\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \big(\sin x\big)^2\,\mathrm{d}x$$
Par la propriété de linéarité de l'intégrale :
$$= \int_0^\pi \big(\cos x\big)^2+\big(\sin x\big)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x = \big[x\big]_0^\pi$$
$$= \pi - 0 = \pi$$
Calculons la différence :
$$I-J = \int_0^\pi \big(\cos x\big)^2\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi \big(\sin x\big)^2\,\mathrm{d}x$$
Par la propriété de linéarité de l'intégrale :
$$= \int_0^\pi \big(\cos x\big)^2-\big(\sin x\big)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos(2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\pi \frac{1}{2}\times 2{\cdot}\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}{\cdot}\int_0^\pi 2{\cdot}\cos(2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \big[\sin(2x)\big]_0^\pi = \sin(2\pi)-\sin 0 = 0-0 = 0$$

2. Du second calcul intégral, on en déduit : $I=J$.
Du premier calcul intégral, on obtient la valeur de I :
$I+J=\pi$
$I+I=\pi$
$2{\cdot}I=\pi$
On en déduit :
$$I = J = \frac{\pi}{2}$$

Correction 4

1. a. La fonction cosinus est positive sur l'intervalle $\big[0\,;\frac{\pi}{2}\big]$: elle est positive sur l'intervalle $\big[0\,;1\big]$.
Le facteur t^n est également positif sur l'intervalle $\big[0\,;1\big]$ pour toute valeur de n.
Ainsi, on en déduit que le produit suivant est positif pour tout entier naturel n non-nul et pour tout réel t appartenant à l'intervalle $\big[0\,;1\big]$:
$t^n{\cdot}\cos t \geqslant 0$
La propriété de positivité de l'intégrale donne :
$$\int_0^1 t^n{\cdot}\cos t\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

b. Etudions la différence suivante :
$$x_{n+1}-x_n = \int_0^1 t^{n+1}{\cdot}\cos t\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^n{\cdot}\cos t\,\mathrm{d}t$$
Par linéarité de l'intégrale :
$$= \int_0^1 t^{n+1}{\cdot}\cos t - t^n{\cdot}\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 t^n{\cdot}\big(t{\cdot}\cos t-\cos t\big)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 t^n{\cdot}(t-1){\cdot}\cos t\,\mathrm{d}t$$
Or, sur l'intervalle $\big[0\,;1\big]$, on a :
$t^n \geqslant 0 \quad ; \quad t-1 \leqslant 0 \quad ; \quad \cos t \geqslant 0$
On obtient le signe suivant :
$t^n{\cdot}(t-1){\cdot}\cos t \leqslant 0$
Par positivité de l'intégrale :
$$\int_0^1 t^n{\cdot}(t-1){\cdot}\cos t\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$
$$x_{n+1}-x_n \leqslant 0$$
$$x_{n+1} \leqslant x_n$$
On vient d'établir que la suite (x_n) est une suite décroissante.

Correction 5

1. La courbe $\mathscr{C}$ est positive sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi, l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x=-\frac{\pi}{2}$ et $x=\frac{\pi}{2}$ est donnée par le calcul intégral :

$$\mathcal{A} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \left[a\cdot\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= a\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - a\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = a\times1 - a\times(-1) = 2\cdot a$$

2. Le rayon du disque est $\frac{a}{2}$.

Pour que l'aire grisée soit égale à l'aire du disque, il faut que l'aire du disque soit la moitié de l'aire $\mathcal{A}$ définie dans la question 1.. Cherchons la valeur de a vérifiant :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \frac{\mathcal{A}}{2}$$

$$\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2\cdot a}{2}$$

$$\pi\cdot\frac{a^2}{4} = a$$

$$\pi\cdot a^2 = 4\cdot a$$

$$\pi\cdot a^2 - 4\cdot a = 0$$

$$a\cdot(\pi\cdot a - 4) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$a = 0$ | $\pi\cdot a - 4 = 0$; $\pi\cdot a = 4$; $a = \frac{4}{\pi}$

Ainsi, il faut que : $a=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}785$

FIN de l'ex 4 :

c. La suite (x_n) est une suite décroissante et minorée par 0. Le théorème de convergence des suites monotones permet d'affirmer que la suite (x_n) est convergente.

Correction 6

Déterminons l'abscisse du point B. Le point B étant un point d'intersection des courbes des fonctions f et g, il doit réaliser l'égalité :

$$f(x) = g(x)$$

$$\ln(x+1) = \ln(x+1) + 1 - \cos x$$

$$0 = 1 - \cos x$$

$$\cos x = 1$$

$$\cos x = 0$$

On en déduit que les abscisses des points A et B sont des multiples de $2\cdot\pi$. On en déduit :

$A(2\pi\,;f(2\pi))$; $B(4\pi\,;f(4\pi))$

Ainsi l'aire hachurée sur la figure se détermine par le calcul intégral :

- $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\ln(x+1) + 1 - \cos x\right] - \left[\ln(x+1)\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 - \cos x\,\mathrm{d}x = \left[x - \sin x\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left[2\pi - \sin(2\pi)\right] - \left[0 - \sin(0)\right] = 2\pi - \sin(2\pi) - 0$$

$$= 2\pi - 0 = 2\pi$$

- $\displaystyle\int_{2\pi}^{4\pi} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x$

$$= \int_{2\pi}^{4\pi} \left[\ln(x+1) + 1 - \cos x\right] - \left[\ln(x+1)\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_{2\pi}^{4\pi} 1 - \cos x\,\mathrm{d}x = \left[x - \sin x\right]_{2\pi}^{4\pi}$$

$$= \left[4\pi - \sin(4\pi)\right] - \left[2\pi - \sin(2\pi)\right]$$

$$= 4\pi - 0 - 2\pi + 0 = 2\pi$$

On en déduit que les deux surfaces hachurées sont d'aires égales.