Équations différentielles

Activités d'introduction

Une équation différentielle est une équation :
- dont l'inconnue est une fonction (généralement notée y(x) ou simplement y)
- dans laquelle apparaissent certaines dérivés y', y'', etc.

Activité 1. Trouver au moins une fonction, solution des équations différentielles suivantes :

$y'=y$ $\qquad y'=1+\mathrm{e}^x$ $\qquad y'=\sin x$ $\qquad y''=\cos x$ $\qquad y''=y$

Activité 2. Soit l'équation différentielle (E_2) : $f'(x)=2f(x)$ où *f* est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Dire si chacune des fonctions suivantes est solution de (E).

a) $f(x)=5x-4$ b) $g(x)=\ln(3x)$ c) $h(x)=\cos(2x)$ d) $i(x)=\mathrm{e}^{2x+5}$ $j(x)=\mathrm{e}^{2x}+5$

Activité 3. En raison de frottements avec l'atmosphère résiduelle terrestre, les satellites en orbite basse perdent progressivement de l'altitude et finissent par se consumer dans l'atmosphère. Cet événement s'appelle « une rentrée atmosphérique ». Le temps, en jours, avant la rentrée atmosphérique d'un satellite dépend de l'altitude *h* de son orbite (en km). Ce temps est modélisé par une fonction Φ dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et solution de l'équation différentielle (E) : $y'-0{,}025\,y=0$.

1. Montrer que la fonction $u: h \to \mathrm{e}^{0{,}025\,h}$ est une solution de (E).

2. Soit Φ une solution de (E) et *v* la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $v(h)=\mathrm{e}^{-0{,}025\,h}\Phi(h)$.

a. Justifier que *v* est une fonction constante.

b. En déduire que $\Phi(x)=\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{0{,}025h}$, où C est une constante réelle.

3. Si l'orbite d'un satellite est à 800 km et le temps avant sa rentrée atmosphérique est de 2000 jours, déterminer la fonction Φ .

Activité 4 (d'après un sujet de BTS). Lorsqu'un fil électrique est parcouru par un courant électrique d'intensité constante, celui-ci s'échauffe par effet Joule et sa température varie en fonction du temps. On note $f(t)$ la température, exprimée en degré Celsius, du conducteur à l'instant *t* , exprimé en seconde, avec *t* variant dans l'intervalle [0 ; +∞[.

À l'instant $t=0$ de la mise sous tension, la température du conducteur est celle du milieu ambiant, c'est-à-dire 18 degrés Celsius. Ainsi, on a $f(0)=18$.

On admet que la fonction *f* est solution de l'équation différentielle (E) : $y'+0{,}05\,y=2$ où *y* est une fonction inconnue de la variable *t* , définie et dérivable sur [0 ; +∞[, et y' sa fonction dérivée.

1. Vérifier que la fonction *g* définie par $g(t)=40$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2. Soit *h* une solution de (E).

a. Montrer que $h'(t)-g'(t)+0{,}05(h(t)-g(t))=0$ pour tout réel *t* positif.

b. En déduire que la fonction $h-g$ est une solution d'une équation différentielle de la forme $y'=ay$.

c. Préciser la valeur de *a*, résoudre l'équation et en déduire l'expression de *h*.

3. On rappelle que la température initiale du conducteur est 18° Celsius.

a. Déterminer alors une expression de la fonction *f* .

b. Quelle est la température du fil au bout d'une minute ?