Calcul intégral
Intégration par parties

L'intégration par parties est une méthode pour intégrer une fonction dont on ne connait pas une primitive. Elle s'applique lorsque l'on cherche à calculer *l'intégrale d'un produit de deux fonctions.*

> ***Théorème*** : Si u et v deux fonctions dérivables sur $[a\,;b]$ admettant des dérivées u' et v' continues sur $[a\,,b]$, alors $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$
>
> Moins rigoureux mais plus facile à retenir : $\int_a^b uv'=[uv]_a^b-\int_a^b u'v$

1. Preuve : a) Quelle est la dérivée de la fonction uv sur $[a\,;b]$?

b) Déterminer alors une expression de $\int_a^b u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$

c) En déduire que $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$

2. Intérêt et exemples

Cette formule s'applique lorsque l'on cherche à calculer *l'intégrale d'un produit de deux fonctions* et à condition que $\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ soit plus facile à calculer que $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$!

On y songe pour le produit
- d'une fonction polynôme et d'une fonction sinus ou cosinus (avec u égale à la fonction polynôme) ;
- d'une fonction polynôme et d'une fonction logarithme (avec u égale à la fonction logarithme) ;
- d'une fonction exponentielle et d'une fonction sinus ou cosinus (avec u égale indifféremment à la fonction exponentielle ou à la fonction sinus ou cosinus).

Exemple 1 : Calculer $\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

On pose $u(x)=x$ et $v'(x)=\mathrm{e}^x$ on a donc $u'(x)=1$ et $v(x)=\mathrm{e}^x$

Sachant que $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$, on a

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=[x\,\mathrm{e}^x]_0^1-\int_0^1 1\times\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1$$

Remarque : les primitives de $x\,\mathrm{e}^x$ sont $x\,\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+k$.

Exemple 2 : Calculer $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose $u(x)=\ln(x)$ et $v'(x)=1$ on a donc $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=x$

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x \;=\; [x\ln(x)]_1^{\mathrm{e}} \;-\; -\int_1^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}x \;=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1$$

Remarque : les primitives de $\ln(x)$ sont $x\ln(x)-x+k$.

Vidéo : Une minute pour comprendre : https://youtu.be/an2gDiUID_E

Vidéos Yvan Monka :

Intégration par partie I : https://youtu.be/uNIpYeaNfsg

Intégration par partie II : https://youtu.be/vNQeSEb2mj8

Intégration par partie III : https://youtu.be/xbb3vnzF3EA

Site Gecif.net : http://gecif.net/articles/mathematiques/integration_par_parties/

Exercice 1. **Il faudra parfois faire deux intégrations par partie...**

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$ $\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$ $\quad\int_0^5 (x+1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

$\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ $\quad\int_0^1 (2x+3)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ $\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-2x}\cos(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 2. À l'aide d'une intégration par partie, déterminer :

a. La primitive de $x \to x\mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

b. La primitive de $x \to x\cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3. Pour tout entier *n*, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Montrer que pour tout entier *n*, on a $\mathrm{I}_{n+1} = -\mathrm{e}^{-1} + (n+1)\mathrm{I}_n$

c) En déduire I_2, I_3 et I_4.

Exercice 4. Pour tout entier $n \neq 0$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1a. Étudier le sens de variation de (I_n).

1b. Justifier que pour tout entier $n \neq 0$, $\mathrm{I}_n > 0$.

1c. En déduire que (I_n) est convergente.

2a. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que que pour tout entier $n \neq 0$, $\mathrm{I}_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)\mathrm{I}_n$.

2b. En déduire que pour tout entier $n \neq 0$, $(n+1)\mathrm{I}_n < \mathrm{e}$.

2c. Déterminer la limite de la suite (I_n).

3. Déduire de 2a. I_2, I_3 *et* I_4.

Histoire du calcul infinitésimal

Site Maths-et-tiques : https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/mathematiciens-celebres/leibniz

Gottfried Wilhelm von Leibniz - Allemand (1646 ; 1716)
Isaac Newton - Anglais (1642 ; 1727)