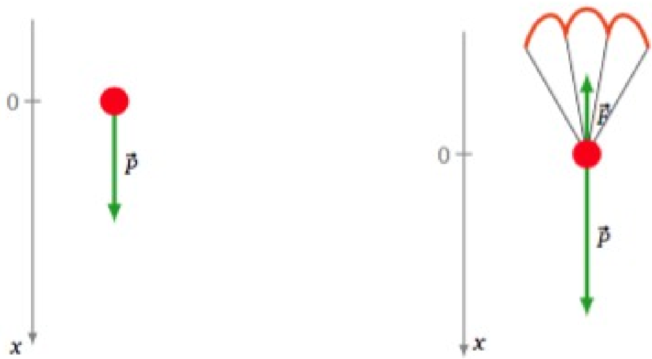
Équations différentielles

I - Introduction

Lorsqu'un corps tombe en chute libre sans frottement, il n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$. Par le principe fondamental de la mécanique : $\vec{P} = m\vec{a}$. Tous les vecteurs sont verticaux donc $mg = ma$, où g est la constante de gravitation, a l'accélération verticale et m la masse. On obtient $a = g$. L'accélération étant la dérivée de la vitesse par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = g \qquad (1)$$

Il est facile d'en déduire la vitesse par intégration : $v(t) = gt$ (en supposant que la vitesse initiale est nulle), c'est-à-dire que la vitesse augmente de façon linéaire au cours du temps. Puisque la vitesse est la dérivée de la position, on a $v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$, donc par une nouvelle intégration on obtient $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (en supposant que la position initiale est nulle).



Le cas d'un parachutiste est plus compliqué. Le modèle précédent n'est pas applicable car il ne tient pas compte des frottements. Le parachute fait subir une force de frottement opposée à sa vitesse. On suppose que le frottement est proportionnel à la vitesse : $F = -fmv$ (f est le coefficient de frottement). Ainsi le principe fondamental de la mécanique devient $mg - fmv = ma$, ce qui conduit à la relation :

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = g - fv(t) \qquad (2)$$

C'est une relation entre la vitesse v et sa dérivée : il s'agit d'une *équation différentielle*. Il n'est pas évident de trouver quelle est la fonction v qui convient. Le but de ce chapitre est d'apprendre comment déterminer $v(t)$, ce qui nous permettra d'en déduire la position $x(t)$ à tout instant.

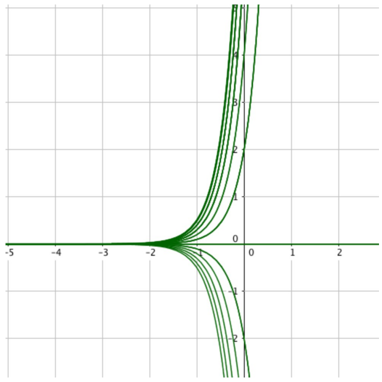
II - Activités

III - Équation différentielle de la forme $y'=ay$

Propriété : Soit a un réel.
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=ay$ est l'ensemble des fonctions $f : x \to C\,e^{ax}$ où C est est une constante réelle.
Preuve

Exemple 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y'=3y$.

(E) est de la forme $y'=ay$ avec $a=3$ donc l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions *f* de la forme $f(x)=Ce^{3x}$.



On a représenté ci-contre quelques solutions :

- lorsque $C>0$, les solutions sont au dessus de l'axe des abscisses ;
- lorsque $C<0$, les solutions sont en dessous de l'axe des abscisses ;
- toutes les solutions admettent l'axe des abscisses comme asymptote.

Exemple 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E): y'=-5y$.

(E) est de la forme $y'=ay$ avec $a=-5$ donc l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions *f* de la forme $f(x)=Ce^{-5x}$.

$f(1)=2 \Leftrightarrow Ce^{-5}=2 \Leftrightarrow C=2e^{5}$

$f(x)=2e^{5(1-x)}$ est donc la solution de (E) vérifiant $f(1)=2$.

Exercice n°1 : Résoudre les équations différentielles :

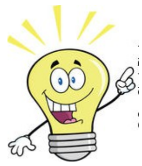
a. $y'+y=0$ **b.** $y'=2y$ c. $3y'=y$ d. $y'=\frac{y}{5}$

Vidéo Yvan Monka : https://youtu.be/YJNHTq85tJA

IV - Équation différentielle de la forme $y'=ay+b$

Les solutions de $(E): y'=ay+b$ s'obtiennent en ajoutant à une *solution particulière* de (E) aux solutions de $(E_0): y'=ay$.

Théorème : Soit *a* un réel non nul. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont les fonctions $f: x \rightarrow Ce^{ax}+y_0$ avec $C\in\mathbb{R}$ et y_0 la fonction contante *solution particulière* de l'équation différentielle $y'=ay+b$.
Preuve



Vocabulaire : L'équation $y'=ay$ est dite « équation homogène associée ».
L'équation $y'=ay+b$ est dite équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants

Exemple 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'=4y-8$.

- L'équation homogène associée est $(E_0): y'=4y$

Les solutions de (E_0) sont les fonctions *f* telles que $f(x)=Ce^{4x}$, $C\in\mathbb{R}$.

- On cherche une solution particulière constante y_0 de (E). $(y_0)'=0$ et $(y_0)'=4y_0-8$ d'où $y_0=2$

Les solutions de (E) sont les fonctions *f* de la forme $f(x)=Ce^{4x}+2$, $C\in\mathbb{R}$.

Exemple 4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'=-0{,}5y+1$ telle que $f(0)=4$

- L'équation homogène associée est $(E_0): y'=-0{,}5y$

Les solutions de (E_0) sont les fonctions *f* telles que $f(x)=Ce^{-0{,}5x}$, $C\in\mathbb{R}$.

- On cherche une solution particulière constante y_0 de (E) : $(y_0)'=0$ et $(y_0)'=-0{,}5y_0+1$ d'où $y_0=2$. Les solutions de (E) sont les fonctions *f* de la forme $f(x)=Ce^{-0{,}5x}+2$, $C\in\mathbb{R}$.

- La condition initiale $f(0)=4$ permet de trouver C :

$f(0)=4 \Leftrightarrow C+2=4 \Leftrightarrow C=-2$.

La solution de l'équation différentielle (E) : $y'=-0{,}5y+1$ telle que $f(0)=4$ est $f(x)=-2e^{-0{,}5x}+2$

Exercice n° 2 : Résoudre les équations différentielles :

a. $y'+2y=6$ **b.** $y'-3y=9$ **c.** $2y'+3y=-7$ **d.** $y'=\frac{-y}{2}+2$

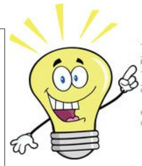
e. $y'+3y=12$ et $y(0)=1$

Vidéo Yvan Monka : https://youtu.be/CFZr44vny3w

III - Équation différentielle de la forme $y'=ay+f$

a est un réel et *f* une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

Théorème : Étant donnée une solution particulière y_0 de l'équation différentielle $y'=ay+f$, les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $f:x\rightarrow C\,e^{ax}+y_0(x)$ avec $C\in\mathbb{R}$.
Preuve



Exemple 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'-2y=e^x$.

- L'équation homogène associée est $(E_0): y'-2y=0$.
Les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme $y=C\,e^{2x}$, $C\in\mathbb{R}$.
- Vérifions que $y_0: x\rightarrow -e^x$ est une solution particulière de (E) :
$\forall x\in\mathbb{R}$, $(y_0)'=-e^x$ et $(y_0)'-2y_0=-e^x-2(-e^x)=e^x$ donc y_0 est une solution particulière de (E).
- Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y=C\,e^{2x}-e^x$, $C\in\mathbb{R}$.

Exercice n°3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'+2y=x^2+x+1$

a. Déterminer une fonction polynôme de degré 2 solution de (E).

b. Résoudre l'équation homogène associée à (E).

c. En déduire toutes les solutions de (E).

Vidéo Yvan Monka : https://youtu.be/Xd9bKiQgzp8

Exercice n°4 - Désintégration des noyaux radioactifs

Les noyaux des atomes d'un corps radioactif se désintègrent selon la loi suivante :

Si N(t) est le nombre de noyaux présents à l'instant t (en années), pendant la durée dt, alors la variation dN(t) du nombre de noyaux est proportionnelle à dt et à N(t).

Les physiciens écrivent : $dN(t)=-\lambda N(t)dt$ avec $\lambda>0$ la constante caractéristique du noyau.

En faisant tendre le temps d'observation vers 0, avec N dérivable, on obtient la relation $N'(t)=-\lambda N(t)$.

Pour le carbone 14, on a $\lambda=\dfrac{\ln 2}{5730}$.

1. En déduire l'expression de la quantité de carbone 14 en fonction du temps.
2. Quel est le nombre initial de noyaux N_0 ?
3. Quelle sera la proportion de C_{14} restant après 10 000 ans ? Après 20 000 ans ?
4. La demi-vie est le temps au bout duquel le nombre initial N_0 de noyaux a diminué de moitié. Quelle est la demi-vie du carbone 14 ?

Applications à la datation

1. Une des premières applications est la datation de la grotte de Lascaux en 1949. La proportion de C_{14} dans les pigments des fresques était d'environ 16 %. Quel est l'âge de ces fresques ?

2. Le squelette d'un « homme de Cro-Magnon » contient 5 % de C_{14} . Quel est son âge ?