LOIS À DENSITÉ : LOI NORMALE

Cours de N. Daval (Partie B du cours Lois de densité)
http://mathematiques.daval.free.fr

Loi normale

Définition

aussi appelée loi gaussienne, loi de Gauss ou loi de Laplace-Gauss

Définition 14.

Soit μ et σ deux réels tels que $\sigma > 0$. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi normale**, si pour tous réels c et d, on a :

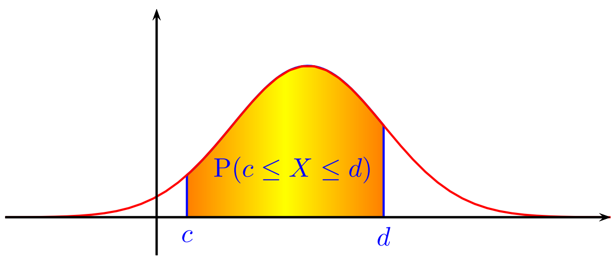
$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

on note $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

f est appelée **densité de la loi normale de paramètre μ et σ**.

Représentation graphique :

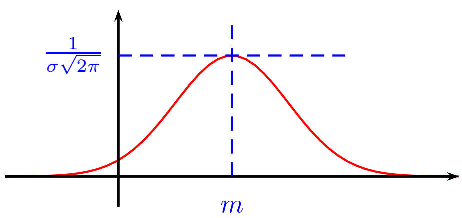
courbe « en cloche »



Proriété 15.

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m; \sigma)$ alors les paramètres d'une loi normale sont son espérance et son écart-type :

$$E(X) = m \text{ et } \sigma(X) = \sigma.$$



- la courbe admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = m$;
- le maximum de la courbe est atteint en m, espérance de la variable X et vaut $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;
- plus σ est grand, plus la courbe « s'étale » autour de m.

SF4 page 253

Ex 32 à 39 page263

`Les syntaxes, avec les calculatrices sont les suivantes :`

Casio 35 : P$(a \leq X \leq b)$ = `NormCD`(a, b, σ, μ)

TI 82 : P$(a \leq X \leq b)$ = `normalFrep`(a, b, μ, σ)

Exemple 16

Une entreprise produit en grande quantité des pièces détachées destinées à l'industrie.
Une pièce est conforme lorsque sa longueur (en millimètres) appartient à l'intervalle $[\,74,4\,;75,6\,]$.
On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée au hasard, associe sa longueur.

$L \sim \mathcal{N}(\,75\,;0,25\,)$

On suppose que la variable aléatoire L suit la loi normale d'espérance 75 et d'écart type $0,25$. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit conforme ?

On calcule $P(74,4 \leqslant L \leqslant 75,6)$, la calculatrice donne $0,98$.
La pièce est donc conforme dans 98% des cas.

3.2 Intervalles en fonction de σ

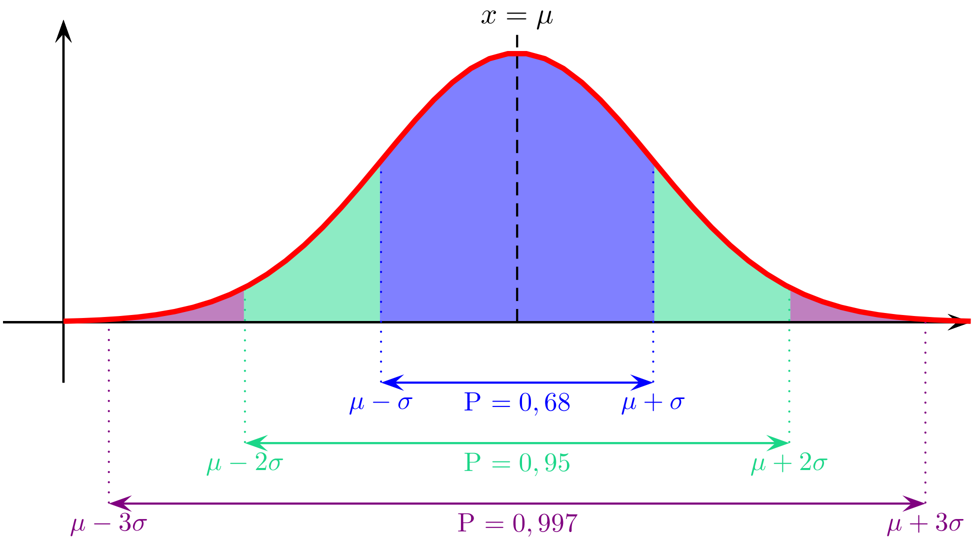
Ex 40 à 48 page 265

Proriété 17.

Si X suit la loi normale de paramètres μ et σ, alors

- $\mathrm{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$;
- $\mathrm{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$;
- $\mathrm{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$.

Interprétation graphique :



Exemple 18

On reprend l'exercice 16, quelle valeur doit-on donner à h pour avoir l'égalité :
$P(75 - h \leq L \leq 75 + h) = 0,997$?

On utilise la formule : $\mathrm{P}(\mu - 3\sigma \leq L \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$ et on a :
$\mathrm{P}(75 - 3 \times 0,25 \leq L \leq 75 + 3 \times 0,25) \approx 0,997$ donc, $h = 3 \times 0,25 = 0,75$.

De plus, $\mathrm{P}(74,25 \leq L \leq 75,75) \approx 0,997$, ce qui signifie que quasiment toutes les pièces (99,7 %) ont théoriquement une largeur comprise entre 74,25 mm et 75,75 mm.

SF5 page 255
Ex 53 à 55 page 266

Approximation

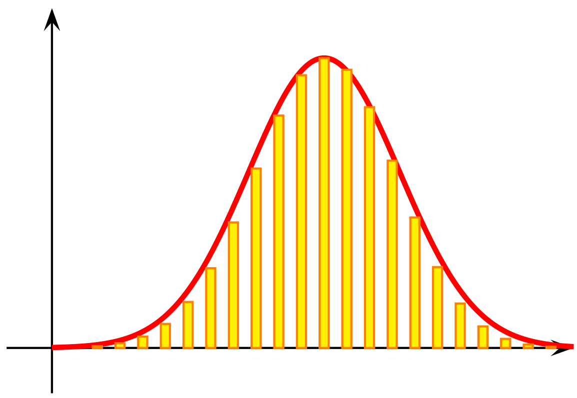
loi de Bernoulli et loi binomiale

Rappels : on répète n fois, de façon indépendante, une même expérience aléatoire suivant une loi de **Bernoulli** donnant lieu à deux issues : succès (probabilité p) et échec (probabilité $1-p$).
La variable aléatoire X qui, à cette série de n expériences, associe le nombre de succès suit la loi **binomiale** $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres n et p.
Son espérance est $E(x)=np$ et son écart-type $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$.

Proriété 19.

La loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$ lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

On a représenté ci-contre le diagramme en bâtons de la loi de probabilité d'un loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ ainsi que la représentation graphique de la densité de probabilité de la loi normale $\mathcal{N}\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$.
On remarque une certaine similitude !



Exemple 20
Un revendeur de matériel photographique désire s'implanter dans une galerie marchande.
Il estime qu'il pourra vendre 40 appareils photo par jour et les ventes sont deux à deux indépendantes. Une étude lui a montré que, parmi les différentes marques disponibles, la marque A réalise 38,6 % du marché.
On note X la variable aléatoire qui, un jour donné, associe le nombre d'appareils de marque A vendus ce jour-là.

- on peut assimiler ces 40 ventes indépendantes à un schéma de Bernoulli où le succès est l'événement « l'appareil de marque A est vendu ». Alors, la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres : $n=40$ et $p=0,386$;
- la probabilité que, sur 40 appareils vendus ce jour, 10 soient de la marque A vaut $\mathrm{P}(X=10)=\begin{pmatrix}40\\10\end{pmatrix}\times 0,386^{10}\times 0,614^{30}\approx 0,03$;

$P(X=k)=\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}p^k(1-p)^{n-k}$

- l'espérance de X vaut $E(X)=np=40\times 0,386=15,44$ et son écart type vaut $\sigma=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{40\times 0,386\times 0,614}\approx 3,08$;
- on peut approcher cette loi par loi normale de paramètres $\mu=15,44$ et $\sigma=3,08$;
- la probabilité de l'événement : « un jour donné, le nombre d'appareils de marque A vendus est compris entre 15 et 25 » vaut $\mathrm{P}(15\leq Y\leq 25)=0,56$.