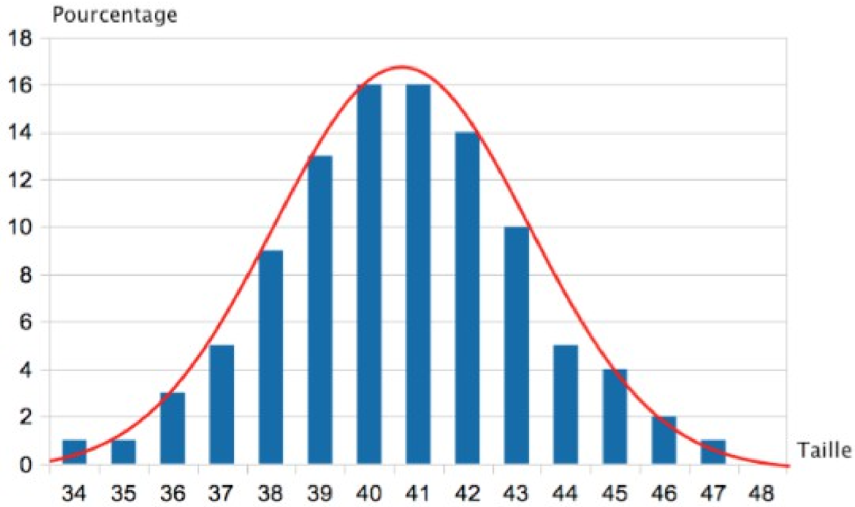
Lois continues
Partie I : Fonction de densité

Les lois étudiées jusqu'à présent (Bernouilli, binomiale) sont des lois « discrètes » : les variables aléatoires prennent un nombre fini de valeurs : on les appelle des *variables aléatoires discrètes*. Dans ce chapitre, on s'intéresse à des lois « continues », c'est-à dire pour lesquelles la variable aléatoire peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle, on les appelle lois à densité.

Exemple 1 (extrait du site de Y. Monka)

Un site de vente en ligne de vêtements établit le bilan des ventes par âge en années de ses clients de la semaine. L'histogramme ci-dessous résume ce bilan.



Du discret...

On désigne par X la variable aléatoire qui donne l'âge d'un client connecté.
X prend ses valeurs dans l'ensemble {34 ; 35 ; 36 ; ... ; 47 ; 48}
On a par exemple : $\mathrm{P}(\mathrm{X}=40)=0,16$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X}=45)=0,04$. On a encore : $\mathrm{P}(37\leqslant \mathrm{X}\leqslant 40)=0,43$.

... au continu

En fait, dans sa base de donnée, le site connait la date de naissance des clients donc leur âge en années, mois, jours, heures,... Ces données permettent de tracer la courbe rouge plus détaillée que l'histogramme.

La fonction correspondant à cette courbe est appelée fonction de densité.

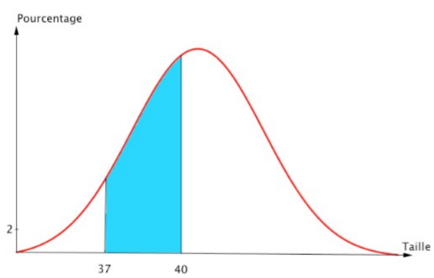
La variable aléatoire Y qui donne l'âge (années, mois, jours, heures,...) des clients prend ses valeurs dans l'intervalle [34 ; 48]. Dans cette situation, la probabilité qu'un client ait un âge donné (38 ans, 3 mois, 4 jours, 5 heures, 12 minutes, 5 secondes...) est nulle.

Quel que soit *a*, $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=a)=0$

Une telle variable aléatoire est dite **continue**, sa loi de probabilité n'est pas associée à la probabilité **d'une** de ses valeurs mais à la probabilité d'un **intervalle** inclus dans [34 ; 48].

La probabilité $\mathrm{P}(37\leqslant \mathrm{Y}\leqslant 40)$ correspond à l'aire sous la courbe de la fonction *f* entre les droites d'équation $x=37$ et $x=40$.

$\mathrm{P}(37\leqslant \mathrm{Y}\leqslant 40)=\int_{37}^{40} f(x)\,\mathrm{d}x$.

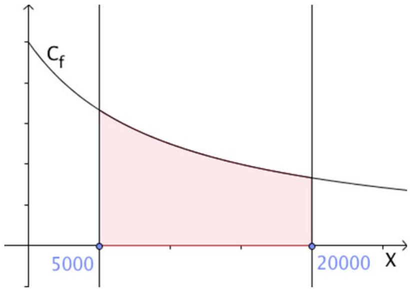


Exemple 2

Une entreprise fabrique des disques durs.
On définit une variable aléatoire X qui, à chaque disque dur, associe sa durée de vie en heures. Cette durée n'est pas nécessairement un nombre entier et peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle [0 ; + ∞[.
X est une variable aléatoire continue.

On pourra calculer par exemple $P(5000 \leqslant X \leqslant 20\,000)$ correspondant à la probabilité que la durée de vie d'un disque dur soit comprise entre 5 000 heures et 20 000 heures.

Ou $P(X > 7000)$ correspondant à la probabilité que la durée de vie d'un disque dur soit supérieure à 7000 heures.

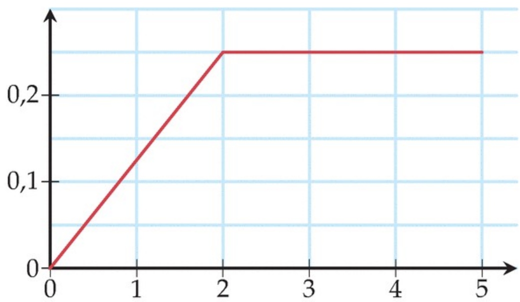


La probabilité $P(5\,000 \leqslant X \leqslant 20\,000)$ est l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction de densité et les droites d'équation $x=5000$ et $x=20000$.

$$P(5\,000 \leqslant X \leqslant 20\,000) = \int_{5000}^{20000} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ainsi, la loi de probabilité (la répartition des probabilités)
est donné par la fonction de densité (et non plus par un tableau de probabilités).

Exercice 1 : On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur [0;5] est représentée ci-dessous :



Déterminer :

a) $P(0 \leqslant X \leqslant 2)$

b) $P(3 < X < 4)$

c) $P(X = 2)$

d) $P(X > 3)$

Exercice 2 : On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur ℝ est représentée ci-dessous. On admet que la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que $P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}4) = 0{,}155$.

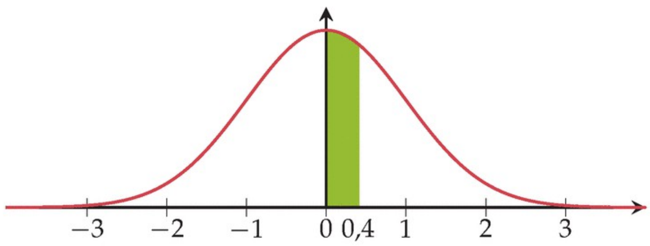
Déterminer :

a) $P(-0{,}4 < X \leqslant 0)$

b) $P(X < 0)$

c) $P(X \geqslant 0{,}4)$

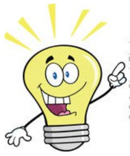
d) $P(-0{,}4 \leqslant X \leqslant 0{,}4)$

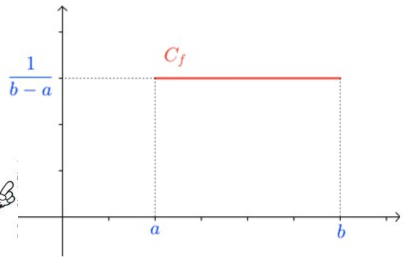


Loi continue
Partie II : Loi uniforme sur [a ; b]

II - Loi uniforme sur [a ; b]

Définition : Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
La **loi uniforme** sur [a ; b], notée $\mathscr{U}([a\,;\,b])$, est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction constante f définie sur [a ; b]
par : $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$.





Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur [a ; b].
- Pour tout réel x *et* y de [a ; b], on a $\mathrm{P}(x<\mathrm{X}<y)=(y-x)\times\dfrac{1}{b-a}=\dfrac{y-x}{b-a}$

C'est *l'aire du rectangle* de dimensions $(y-x)$ et $(b-a)$.

- L'espérance de X est $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\dfrac{b+a}{2}$.

Aucune formule à apprendre par cœur, on calcule l'aire d'un rectangle...

Quand utiliser la loi uniforme ?

Cette loi modélise un phénomène uniforme sur un intervalle donné. La notion d'uniformité vient du fait que *la probabilité qu'une valeur soit dans un certain intervalle ne dépend pas de la position de l'intervalle, mais uniquement de sa longueur*. On l'utilise généralement lorsque la situation se ramène à choisir au hasard un réel dans un intervalle [a ; b] .

Quand on choisit un **nombre au hasard** entre a et b.

Par exemple, Julie doit arriver entre 13h et 15h.
Cela, revient à choisir un nombre au hasard entre 13 et 15.
On modélise cette situation par la loi uniforme sur [13;15] de densité constante $\frac{1}{2}$.

Source : Site jaicompris.com

Exemple 1 : Caroline a dit qu'elle passerait voir Julien à un moment quelconque entre 18h30 et 20h45. Quelle est la probabilité qu'elle arrive pendant le feuilleton préféré de Julien qui dure de 19h à 19h30 ?

Soit X la variable aléatoire égale à l'heure d'arrivée de Caroline chez Julien.
X prend ses valeurs dans l'intervalle [18,5 ; 20,75]
X suit la loi uniforme sur [18,5 ; 20,75], la fonction de densité est la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{2{,}25}$

donc $\mathrm{P}(19\leqslant \mathrm{X}\leqslant 19{,}5) = \dfrac{1}{2{,}25}\times(19{,}5-19)\approx 0{,}22$.

La probabilité que Caroline arrive pendant le feuilleton est d'environ 0,22.

Exercice 1 : On considère que le temps d'attente T à un guichet, en minutes, est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;20]$.

1. Déterminer la probabilité qu'une personne arrivant au guichet attende entre cinq minutes et un quart d'heure à ce guichet.

2. Déterminer la probabilité qu'une personne attende plus d'un quart d'heure à ce guichet.

3. Sachant que Marion a déjà attendu 10 minutes à ce guichet (sans être servie), quelle est la probabilité qu'elle attende encore au moins 5 minutes ?

4. Déterminer le temps d'attente moyen que peut espérer une personne arrivant à ce guichet.

Exercice 2 :Aux heures d'ouverture d'une gare de banlieue, un train passe toutes les heures à destination de Paris. Un voyageur, qui n'a pas eu le temps de se renseigner sur les horaires, se présente à la gare.

On note X la variable aléatoire donnant le temps d'attente, en minutes, de ce voyageur à la gare.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ?

2. Calculer la probabilité que le voyageur attende :

a. Exactement 15 minutes. **b.** Entre 15 et 30 minutes. **c.** Plus de 40 minutes.

Savoir faire 1 page 247

Vidéo (Y. Monka) : https://youtu.be/yk4ni_iqxKk

Vidéo (Loi uniforme) : Site *J'aicompris* (cours bien résumé, bien illustré avec des exemples corrigés) : http://www.jaicompris.com/lycee/math/probabilite/loi-uniforme.php

Exercices 1 à 6 page 260

Obligez-vous systématiquement à : ***écrire la loi de densité et faire un schéma à main levée.***

Loi continue
Partie III : Loi exponentielle

*De nos jours, nous avons une idée de la probabilité de vivre 40 ans pour un enfant qui vient de naître. Les tables de mortalité donnent un nombre de l'ordre de 0,98. La probabilité de vivre 40 ans de plus, pour une personne de 50 ans, est un nombre bien inférieur, de l'ordre de 0,65. Pour une personne de 60 ans, cette probabilité de vivre 40 ans de plus est de l'ordre de 0,02. Le fonctionnement naturel des humains et des animaux suit **la loi du vieillissement ou de l'usure** : on n'a pas la même probabilité de vivre 40 ans de plus lorsque l'on vient de naître ou lorsque l'on a 50 ans.*

La plupart des phénomènes naturels sont soumis au processus de vieillissement.

*Il existe des phénomènes où il n'y a pas de vieillissement ou d'usure. Il s'agit en général de phénomènes accidentels. **Pour ces phénomènes, la probabilité, pour un objet d'être encore en vie ou de ne pas tomber en panne avant un délai donné sachant que l'objet est en bon état à un instant t, ne dépend pas de t.***

*Les variables aléatoires décrivant une durée de vie sans usure suivent toutes **une loi exponentielle**.*

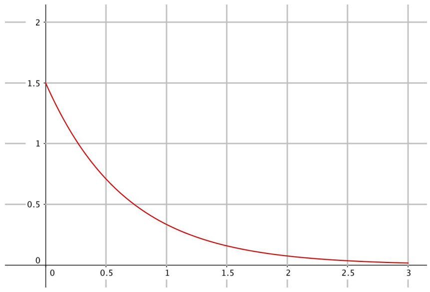
a. Définition : soit λ un réel *strictement positif*.
Une variable aléatoire à densité X suit une loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité est la fonction *f* définie sur [0; $+\infty$ [par $\boxed{f(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}}$.

Exemple 1a : X est une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

La courbe C_f ci-contre représente la fonction densité associée à la loi exponentielle de paramètre λ .

a. Lire graphiquement λ puis en déduire l'expression de $f(x)$.

On lit $f(0)=1{,}5$ d'où $\lambda\times\mathrm{e}^0=1{,}5$ et $\lambda=1{,}5$.



b) Propriété : si T suit la loi exponentielle de paramètre λ , alors pour tout réel t :

$$\boxed{P(T\leqslant t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

Preuve : $f(t)=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ donc $F(t)=-\mathrm{e}^{-\lambda t}$ et $P(T\leqslant t)=F(t)-F(0)=-\mathrm{e}^{-\lambda t}-(-1)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$

Exemple 1b : X est une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre 1,5.

Déterminer $P(X\leqslant 2)$; $P(X\geqslant 1)$ et $P(1<X<2)$ à 10^{-3} près.

$P(X\leqslant 2)=1-\mathrm{e}^{-1{,}5\times 2}=1-\mathrm{e}^{-3}\approx 0{,}95$

$P(X\geqslant 1)=1-P(X\leqslant 1)=1-(1-\mathrm{e}^{-1{,}5})=\mathrm{e}^{-1{,}5}\approx 0{,}223$

$P(1<X<2)=P(X<2)-P(X\leqslant 1)=1-\mathrm{e}^{-3}-(1-\mathrm{e}^{-1{,}5})=\mathrm{e}^{-1{,}5}-\mathrm{e}^{-3}\approx 0{,}173$

Propriété : L'espérance d'une variable aléatoire T suivant une loi de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$

Exemple 1c : X est une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre 1,5.

l'espérance de X est $E(X)=\dfrac{1}{1{,}5}=\dfrac{2}{3}$.

SF3 page 251 ; Exercices 17 à 31 page 263