

Espace (III) : Partie 1

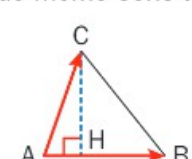
Produit scalaire


I. Rappel produit scalaire dans le plan

On peut calculer un produit scalaire de deux vecteurs dans le plan...

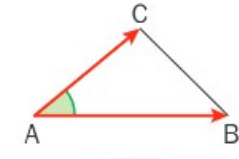
...avec une projection orthogonale

Si \vec{AB} et \vec{AH} sont :

de même sens :  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$

de sens contraire :  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$

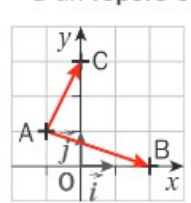
...avec la trigonométrie



$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ si et seulement si (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

...avec les coordonnées dans le plan muni d'un repère orthonormé



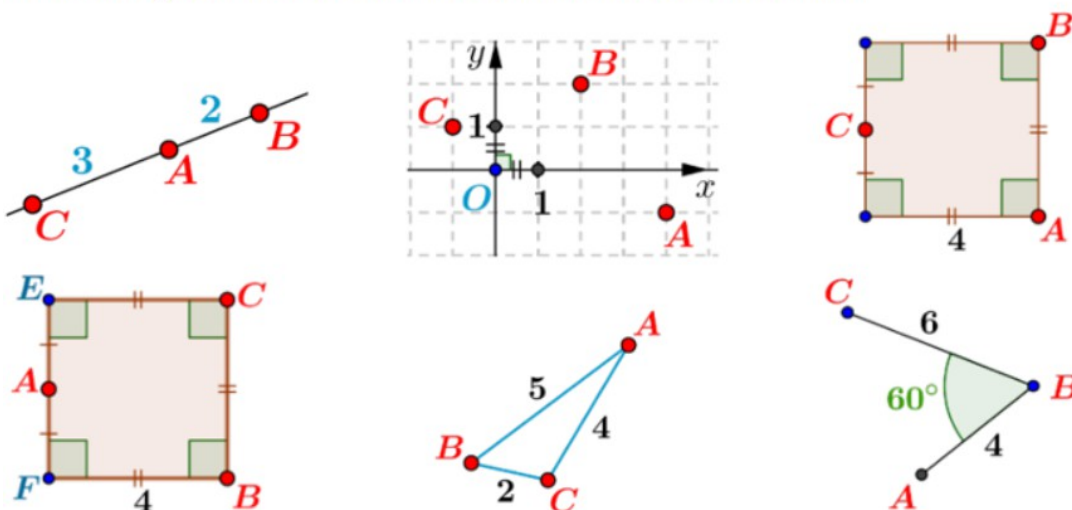
$\vec{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\vec{AC} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = xx' + yy'$

Voir les fiches de révision + lien vers vidéo Mathrix sur le blog
Faire impérativement les exercices 1 à 10
Pour les « maths + » : reprendre le cours Milan 1S indispensable

Exercice 1 : Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ dans chacun des cas suivants:



II. Produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace

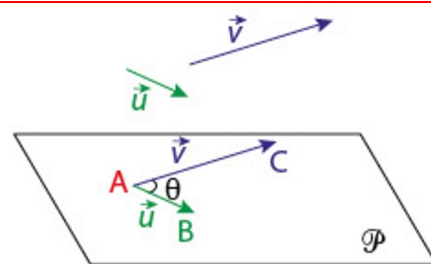
1) Définition : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace. A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$. Il existe un plan P contenant les points A, B et C.

Définition :

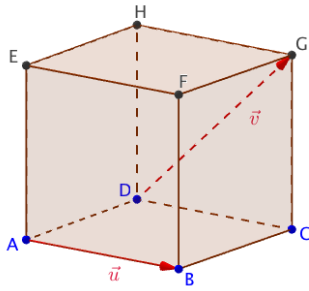
On appelle *produit scalaire de l'espace* de \vec{u} et \vec{v} le produit $\vec{u} \cdot \vec{v}$ égal au produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ dans le plan P.

On a ainsi :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si \vec{u} ou \vec{v} sont égaux au vecteur nul,
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$ si \vec{u} et \vec{v} sont non nuls.

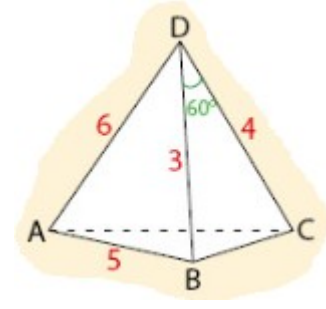


Exemple 1 : cet exemple en vidéo : [ici](#)
 ABCDEFGH est un cube d'arête a .



$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \overline{AB} \cdot \overline{DC} = \overline{AB} \cdot \overline{AF} \\ &= AB \times AF \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= a \times a \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} = a^2 \end{aligned}$$

Exemple 2 : On considère le tétraèdre ci-dessous :



$$\begin{aligned} \overline{DB} \cdot \overline{DC} &= DB \times DC \times \cos(60^\circ) \\ &= \frac{4 \times 3 \times 1}{2} = 6 \end{aligned}$$

2. Propriétés : Les propriétés dans le plan sont conservées dans l'espace.

Propriétés : Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace.

$$\bullet \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \quad \bullet \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \bullet \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \bullet (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad k \text{ a'}$$

En particulier, on peut utiliser la relation de Chasles : $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AB} \cdot (\overline{CE} + \overline{ED}) = \overline{AB} \cdot \overline{CE} + \overline{AB} \cdot \overline{ED}$

$\bullet \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u}$ et \vec{v} sont orthogonaux.

En particulier, $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \iff$ Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Démonstration :

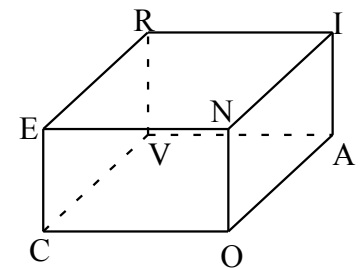
Il existe un plan P tel que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} admettent des représentants dans P .

Dans le plan, les règles de géométrie plane sur les produits scalaires s'appliquent.

Exemple 3 : Dans l'espace, \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$, $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 3$.

$$\begin{aligned} \text{Alors : } (3\vec{u}) \cdot \vec{v} &= 3 \times \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 = 6 & ; (\vec{u} + \vec{v})^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 2^2 + 4 + 3^2 = 14 \\ (\vec{u} - \vec{v})^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 2^2 - 4 + 3^2 = 9. \end{aligned}$$

Exemple 4 : On considère le pavé droit COAVENIR ci-contre tel que :
 $CO = 5$, $CV = 3$ et $CE = 4$.



1. a. Calculer le produit scalaire $\vec{EO} \cdot \vec{NI}$.
- b. Que peut-on en déduire pour les vecteur \vec{EO} et \vec{NI} ?
2. En utilisant la relation de Chasles, déterminer le produit scalaire $\vec{VI} \cdot \vec{RA}$.
3. Calculer le produit scalaire $\vec{CN} \cdot \vec{RO}$.

Solution :

$$1. \vec{EO} \cdot \vec{NI} = (\vec{EN} + \vec{NO}) \cdot \vec{NI} = \vec{EN} \cdot \vec{NI} + \vec{NO} \cdot \vec{NI}$$

$$\text{Or } (EN) \perp (NI) \text{ donc } \vec{EN} \cdot \vec{NI} = 0 \text{ et } (NO) \perp (NI) \text{ donc } \vec{NO} \cdot \vec{NI} = 0$$

D'où $\vec{EO} \cdot \vec{NI} = 0$ et donc les vecteurs \vec{EO} et \vec{NI} sont des vecteurs orthogonaux.

$$2. \vec{VI} \cdot \vec{RA} = (\vec{VR} + \vec{RI}) \cdot (\vec{RI} + \vec{IA}) = \vec{VR} \cdot \vec{RI} + \vec{VR} \cdot \vec{IA} + \vec{RI} \cdot \vec{RI} + \vec{RI} \cdot \vec{IA} = 0 - IA^2 + RI^2 + 0 = -4^2 + 5^2 = 9$$

$$\begin{aligned} 3. \vec{CN} \cdot \vec{RO} &= (\vec{CO} + \vec{ON}) \cdot (\vec{RI} + \vec{IA} + \vec{AO}) = \vec{CO} \cdot \vec{RI} + \vec{CO} \cdot \vec{IA} + \vec{CO} \cdot \vec{AO} + \vec{ON} \cdot \vec{RI} + \vec{ON} \cdot \vec{IA} + \vec{ON} \cdot \vec{AO} \\ &= CO^2 + 0 + 0 + 0 + -IA^2 + 0 = 5^2 - 4^2 = 9 \end{aligned}$$

3) Expression analytique du produit scalaire

Propriété : Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé.
On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ **et en particulier :** $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

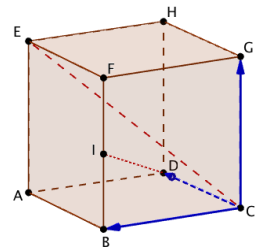
Démonstration : $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$
 $= xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + xz'\vec{i} \cdot \vec{k} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j} + yz'\vec{j} \cdot \vec{k} + zx'\vec{k} \cdot \vec{i} + zy'\vec{k} \cdot \vec{j} + zz'\vec{k} \cdot \vec{k}$
 or les vecteurs \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} sont deux à deux orthogonaux $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$
 et $\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\|^2 = 1$ de même $\vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Exemple 5 : Cet exemple en vidéo : [ici](#)

Soit ABCDEFGH un cube et on considère le repère de l'espace $(C; \vec{CB}; \vec{CD}; \vec{CG})$.

Les vecteurs \vec{CE} et \vec{DI} sont-ils orthogonaux ?

$\vec{CE} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{DI} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ donc $\vec{CE} \cdot \vec{DI} = 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$ et les vecteurs \vec{CE} et \vec{DI} ne sont pas orthogonaux.



4) Formule du produit scalaire avec les normes

Propriétés : Formules de polarisation

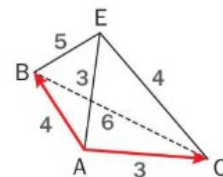
(1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$ (2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

Ces formules se déduisent immédiatement de la propriété précédente.

En particulier, pour trois points A, B, C de l'espace, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.

Exemple 6 : On considère le tétraèdre ci-contre, calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(4^2 + 3^2 - 6^2) = \frac{1}{2} \times (-11) = -5,5$



Une vidéo pour reprendre toute cette partie de chapitre : https://youtu.be/QeOoSKyL_dw

Bilan des formules :

Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \dots$

<p>$AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ si on connaît l'angle BAC et les deux longueurs AB et AC.</p>	<p>$\vec{AB} \cdot \vec{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).</p>	<p>$\frac{1}{2}(\ \vec{AB} + \vec{AC}\ ^2 - AB^2 - AC^2)$ ou $\frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - \ \vec{AC} - \vec{AB}\ ^2)$ si on connaît les normes des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC}.</p>	<p>$xx' + yy' + zz'$ si on connaît les coordonnées de $\vec{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.</p>
<p>Norme d'un vecteur $AB = \ \vec{AB}\ = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (où $\vec{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée).</p>			

Exercices

Exercice 2 :

Énoncé

1. On donne les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2. On donne les vecteurs \vec{u} et \vec{v} tels que : $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 60^\circ$. Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

3. Dans un cube ABCDEFGH d'arête 4, calculer le produit scalaire $\vec{AC} \cdot \vec{AG}$.

Exercice 3 :

On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Déterminer si ces deux vecteurs sont orthogonaux et dans le cas contraire donner une valeur de leur angle en degré, arrondi à 0,01 près.

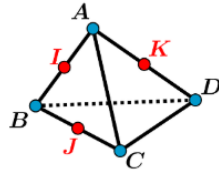
Exercice 4 :

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a .

I, J et K sont les milieux respectifs de [AB], [BC] et [AD].

Déterminer les produits scalaires suivants:

- 1) $\vec{AC} \cdot \vec{AD}$
- 2) $\vec{BI} \cdot \vec{AJ}$
- 3) $\vec{IJ} \cdot \vec{CD}$
- 4) $\vec{JK} \cdot \vec{AD}$

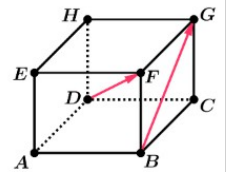


Exercice 5 :

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

Calculer le produit scalaire $\vec{DF} \cdot \vec{BG}$:

- 1) sans utiliser de repère.
- 2) à l'aide d'un repère.



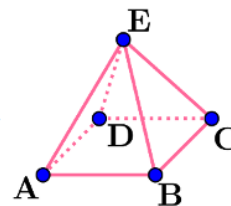
Exercice 6 :

ABCDE est une pyramide à base carrée de sommet E.

Toutes les arêtes sont de même longueur a .

Déterminer les produits scalaires suivants:

$$\vec{EA} \cdot \vec{EB} \quad \vec{EA} \cdot \vec{EC} \quad \vec{EA} \cdot \vec{DC} \quad \vec{ED} \cdot \vec{DB} \quad \vec{DB} \cdot \vec{EC}$$

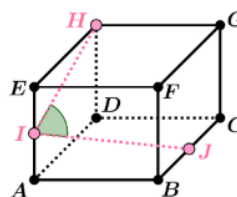


Exercice 7 :

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.

I et J sont les milieux respectifs de [AE] et [BC].

Déterminer la mesure de l'angle \widehat{HTJ} à 0.1° près.



Exercice 8 :

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

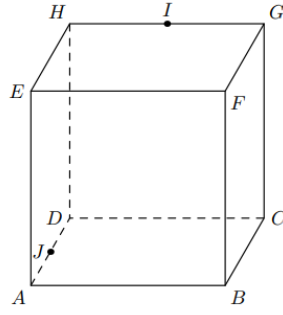
1 On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$. Montrer que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

2 On considère les points $A(4; -2; 0)$, $B(6; 4; -2)$ et $C(12; 6; 0)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 9 :

Exercice 10 :

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-contre où les points I et J sont respectivement les milieux des segments $[GH]$ et $[AD]$.



1. En utilisant les propriétés du cube et du carrés, déterminer la valeur des produits scalaires :

- a. $\vec{EH} \cdot \vec{DH}$ b. $\vec{AF} \cdot \vec{BC}$ c. $\vec{AF} \cdot \vec{HG}$

2. En utilisant également la relation de Chasles, déterminer la valeur des produit scalaires suivants :

- a. $\vec{IE} \cdot \vec{GF}$ b. $\vec{JF} \cdot \vec{AB}$ c. $\vec{IJ} \cdot \vec{EF}$

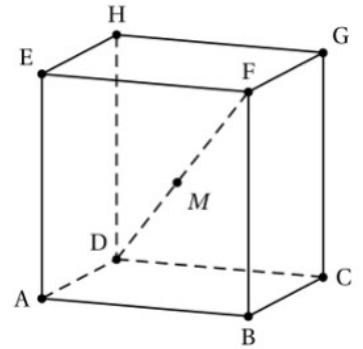
Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les trois points :

$$E(2;1;-3) \quad ; \quad F(1;-1;2) \quad ; \quad G(-1;3;1)$$

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse :

une mesure en degré de l'angle géométrique \widehat{FEG} , arrondie au degré, est 50° .

Exercice 9 : On considère un cube $ABCDEFGH$ dont la représentation graphique en perspective cavalière est donnée ci-dessous.



Les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(D; \vec{DA}; \vec{DC}; \vec{DH})$.

À tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, on associe le point M du segment $[DF]$ tel que $\vec{DM} = x\vec{DF}$.

On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle \widehat{EMB} lorsque le point M parcourt le segment $[DF]$. On a $0 \leq \theta \leq \pi$.

1) Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?

2) Justifier que les coordonnées du point M sont : $(x; x; x)$.

3) Montrer que $\cos(\theta) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$.

4) On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
Variations de f	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

Pour quelles positions du point M sur le segment $[DF]$:

- a) le triangle MEB est-il rectangle en M ? b) l'angle θ est-il maximal?

CORRECTION

Exercice 1 : en vidéo : [ici](#)

Exercice 4 : en vidéo [ici](#)

Exercice 5 : en vidéo : [ici](#)

Exercice 6 : en vidéo : [ici](#)

Exercice 7 : en vidéo [ici](#)

Exercice 11 : en vidéo [ici](#)

Exercice 2 :	<p>1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 1 + 2 \times 2 + (-1) \times 4 = 3$</p> <p>2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \times \ \vec{v}\ \times \cos(\widehat{u, v}) = 2\sqrt{3} \times 3 \times \frac{1}{2} = 3\sqrt{3}$</p> <p>3. Le projeté du point G sur la droite (AC) est le point C donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG} = AC^2 = 16$.</p>
Exercice 3 :	<p>$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 1 + 2 \times 2 + (-1) \times 4 = 3 \neq 0$ donc les vecteurs ne sont pas orthogonaux. 1</p> <p>On utilise la relation : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \times \ \vec{v}\ \times \cos(\widehat{u, v})$ dans laquelle on calcule d'abord les normes : 2 $\ \vec{u}\ = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$ et $\ \vec{v}\ = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21}$</p> <p>et par conséquent : $\cos(\widehat{u, v}) = \frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = \frac{3}{7\sqrt{6}}$, donc : $(\widehat{u, v}) \approx 79,92^\circ$.</p> <div style="border: 1px dashed blue; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p style="text-align: center; background-color: #e0f0ff; border-radius: 5px;">Conseils & Méthodes</p> <p>1 Savoir déduire de l'énoncé quelles formules on va utiliser.</p> <p>2 Faire attention aux calculs des normes.</p> </div>
Exercice 8 :	<p>1 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 4 - 1 \times 14 + 3 \times 2 = 0$. Donc \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.</p> <p>2 $AB = \sqrt{(6-4)^2 + (4-(-2))^2 + (-2+0)^2} = \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$ $AC = \sqrt{(12-4)^2 + (6-(-2))^2 + (0-0)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ $BC = \sqrt{(12-6)^2 + (6-4)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{36+4+4} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$ $AB = AC$ donc le triangle ABC est isocèle en B.</p>

Exercice 9 :

1. a. Les deux arêtes [EH] et [DH] sont perpendiculaires. On en déduit : $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{DH} = 0$

b. On a : $(GF) \perp (EF)$; $(GF) \perp (FB)$

La droite (GF) est perpendiculaire à deux droites contenues dans le plan (FEB). On en déduit que la droite (GF) est orthogonale au plan (FEB).

Ainsi, toute droite du plan (FEB) est orthogonale à la droite (GF). On en déduit que la droite (AF) est orthogonale à la droite (AF) :

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

c. Les vecteurs \overrightarrow{HG} et \overrightarrow{AB} sont égaux. On en déduit l'égalité :

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Le projeté orthogonal du point F sur la droite (AB) est le point B. On en déduit :

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HG} = AB \times AB = 1 \times 1 = 1$$

2. a. D'après la relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HE}$$

On a les manipulations vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{GF} = (\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HE}) \cdot \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{GF}$$

(IH) et (GF) sont perpendiculaires :

$$= 0 + \overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{HE} = HE^2 = 1^2 = 1$$

b. On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{JF} \cdot \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

En utilisant l'orthogonalité des arêtes :

$$= 0 + 0 + \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AB} = EF^2 = 1^2 = 1$$

c. On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{EF} &= (\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DJ}) \cdot \overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{EF} \end{aligned}$$

En utilisant l'orthogonalité des arêtes :

$$= \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{EF} + 0 + 0 = \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{HG}$$

$$= -IH \times HG = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$$

Exercice 10 :

Déterminons les coordonnées des vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} \bullet \overrightarrow{EF} &(x_F - x_E ; y_F - y_E ; z_F - z_E) \\ &= (1 - 2 ; -1 - 1 ; 2 - (-3)) = (-1 ; -2 ; 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \overrightarrow{EG} &(x_G - x_E ; y_G - y_E ; z_G - z_E) \\ &= (-1 - 2 ; 3 - 1 ; 1 - (-3)) = (-3 ; 2 ; 4) \end{aligned}$$

On a les deux distances suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet EF &= \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2 + (z_F - z_E)^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet EG &= \sqrt{(x_G - x_E)^2 + (y_G - y_E)^2 + (z_G - z_E)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29} \end{aligned}$$

Le produit scalaire des vecteurs \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{EG} peut s'exprimer de deux façons :

$$\bullet \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = -1 \times (-3) + (-2) \times 2 + 5 \times 4 = 3 - 4 + 20 = 19$$

$$\begin{aligned} \bullet \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} &= EF \times EG \times \cos(\widehat{EF; EG}) \\ &= \sqrt{30} \times \sqrt{29} \times \cos(\widehat{EF; EG}) \end{aligned}$$

En identifiant les deux résultats obtenus pour le produit scalaire de ces vecteurs, on obtient :

$$19 = \sqrt{30} \cdot \sqrt{29} \cdot \cos(\widehat{EF; EG})$$

$$\cos(\widehat{EF; EG}) = \frac{19}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{29}}$$

$$\cos(\widehat{EF; EG}) \approx 0,6442$$

$$(\widehat{EF; EG}) \approx \cos^{-1}(0,6442)$$

$$(\widehat{EF; EG}) \approx 49,897^\circ$$

$$(\widehat{EF; EG}) \approx 50^\circ$$

L'affirmation est donc vraie.