Pourquoi note-t-on différemment les dérivées en physique et en maths ?

Les dérivées sont souvent notées «$\dfrac{df}{dt}$» ou «$\dot{f}$» en physique, et des questions du style «par rapport à quoi dérive-t-on ?» s'y posent souvent. En mathématique, on notera la dérivée f', et si c'est une fonction d'une variable, la question ci-dessus ne se pose pas.
Dans ce poly, j'essaye d'élucider le lien entre ces deux approches.

Pour résumer : évidemment, ce sont les mathématiciens qui ont raison. Mais pour être parfaitement honnête, les physiciens n'ont pas complètement tort d'«oublier» toute une partie de cette rigueur (d'aucuns diront maniaquerie) mathématique qui ne leur est pas utile pour résoudre des problèmes de physique, au bénéfice de notations beaucoup plus simples à manipuler...

Table des matières

1 Fonctions d'une variable

1.1 Considérons une fonction f de la variable x.

Pour bien commencer, le physicien et le mathématicien ne veulent pas dire la même chose quand ils écrivent la phrase titre de cette section.

- Pour le mathématicien, cela ne veut pas dire grand chose. La variable est muette. $f : x \mapsto x^2$, et $f : t \mapsto t^2$ sont une même et unique fonction, définir la variable muette en disant que c'est x n'a pas de sens en soi.
- Pour le physicien, cela signifie que f est une quantité physique qui dépend de la quantité physique x (position), qui a une existence propre. Écrire que f est une fonction de la variable x signifie que f dépend d'une position. Ce n'est pas pareil que de dire que f est une fonction de la variable t – i.e. qu'elle dépend du temps.

En physique, les variables ne sont pas muettes et interchangeables, car elles ont un sens intrinsèque (elles représentent une certaine «quantité physique»).

1.2 La notation $\dfrac{df}{dx}$

Bref, considérons une fonction f de la variable x.
Une notation possible pour sa dérivée est $\dfrac{df}{dx}$ (on parle de «notation différentielle»).
Cette notation s'explique de la façon suivante : dx désigne une variation très petite (on dit «infinitésimale») de la quantité x. df désigne la variation de $f(x)$ correspondante.

C'est à mettre en relation avec la définition mathématique de la dérivée :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}.$$

On a au dénominateur une «petite» variation de x (celui-ci varie de h, qui tend vers 0), et au numérateur, la variation de f lorsque x subit cette variation.

Les physiciens ont choisi la notation $\frac{df}{dx}$, qui est parlante (et bien pratique comme on va le voir ci-dessous), mais qui laisse à penser que la dérivée est le quotient de «df» et «dx».

Mais mathématiquement, cette dérivée n'est pas égale à une fraction : c'est une **limite** de fraction. Et on ne peut pas vraiment donner de sens mathématiquement précis à «df» et «dx» [1] Il faudra deux bons siècles de controverses entre quelques grands noms de la physique et des mathématiques pour bien comprendre tout cela, depuis les premières utilisations des «infinitésimaux» (Newton et Leibniz, XVIIe siècle), jusqu'à la notion moderne de *limite* en mathématiques (Cauchy, XIXe siècle) (cf https://fr.wikipedia.org/wiki/Histoire_du_calcul_infinit%C3%A9simal).

1.3 La notion $\dot{f}$

En physique, cette notation désigne explicitement une dérivée *par rapport au temps*.

$$\dot{f} = \frac{df}{dt}.$$

1.4 Un exemple «à la physicienne»

Considérons un problème de physique où intervient la position x d'un mobile fixé à un ressort de raideur k, cette position dépendant du temps t.

On définit l'énergie potentielle du système par $E = \frac{1}{2}kx^2$.

On souhaite calculer la dérivée de cette énergie potentielle, par rapport au temps, i.e. $\dot{E} = \frac{dE}{dt}$.

Avec un peu d'habitude, on écrit directement $\dot{E} = kx\dot{x}$, i.e.

$$\frac{dE}{dt} = kx\frac{dx}{dt}.$$

On peut détailler le calcul de la façon suivante :

- Étant donné que $E = \frac{1}{2}kx^2$, $\frac{dE}{dx} = kx$ (en voyant E comme une fonction de x).
- On écrit alors
  $\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx}\frac{dx}{dt}$ (en faisant comme si c'était vraiment des fractions, et que l'on simplifiait par dx – comme expliqué ci-dessus, cela n'a aucun sens mathématique.)
  d'où $\frac{dE}{dt} = kx\frac{dx}{dt}$: on a bien retrouvé la formule ci-dessus.

1.5 Pourquoi cela ne plait pas aux matheux

En vrac :

- dE, dt, dx n'ont pas de sens mathématique, $\frac{dx}{dt}$ n'est pas une fraction, pas évident dans ces conditions de faire la simplification vue si dessus...
- E est-il une fonction de x ? de t ? Que signifie finalement «dériver par rapport à x» ou «dériver par rapport à t».
- x est-il une variable ? Une fonction ? En physique, on confond en général les deux, ce qui ne pose aucun problème pratique, en maths, ce sont deux types d'objets fondamentalement différents.

1. Même si cette notation est celle utilisée en mathématiques pour ce que l'on appelle les «différentielles». Ce sont des objets mathématiques complexes, étudiés au moins en L_2/L_3, et ce n'est pas de cela que l'on parle lorsque l'on écrit $\frac{df}{dx}$.

1.6 Traduction «à la matheuse»

On peut répondre à ces différentes questions dans un cadre mathématique rigoureux, mais beaucoup moins pratique et efficace que le «$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx}\frac{dx}{dt}$» des physiciens.

On définit x comme une fonction : $x : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & x(t) \end{array} \right.$.

On définit E comme une fonction : $E : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & \frac{1}{2}kX^2 \end{array} \right.$.

Comme indiqué en introduction, il n'y a pas de sens mathématique à dire que «x est une fonction de t» – t étant muette. On utilise cette notation pour garder le parallèle avec la physique.
La notation x étant déjà prise pour désigner une fonction, on note X la variable (toujours muette) de E.

Notons alors $F = E\ o\ x : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{2}kx^2(t) \end{array} \right.$.

Mathématiquement, F et E sont des fonctions différentes. Physiquement, elles représentent la même quantité, et on les note toutes les deux E.

- Lorsqu'en physique, on voit E comme une fonction de x, on pense à la fonction E mathématique définie ci-dessus.
- Lorsqu'en physique, on voit E comme une fonction de t, on pense à la fonction F.

et donc :

- Si l'on veut calculer $\dot{E} = \frac{dE}{dt}$, on doit voir E comme une fonction du temps. La quantité mathématique correspondante est F'.
- Si l'on veut calculer $\frac{dE}{dx}$, on doit voir E comme une fonction de x. La quantité mathématique correspondante est E'.

F' peut se calculer en utilisant la dérivée d'une composée :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+\ F'(t) = (Eox)'(t) = E'(x(t))x'(t).$$

Comme $E' : X \mapsto kX$, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}^+\ F'(t) = (Eox)'(t) = kx(t)x'(t).$$

C'est-à-dire, en notation physicienne

$$\frac{dE}{dt} = kx\frac{dx}{dt}.$$

Conclusion : la *simplification de fractions* $\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx}\frac{dx}{dt}$ cache en fait la dérivée d'une composée. Elle cache également les points où sont appliquées ces fonctions : on devrait écrire $\frac{dE}{dt}(t) = \frac{dE}{dx}(x(t))\frac{dx}{dt}(t)$, mais ces précisions sont inutiles pour mener des calculs simples en physique.

1.7 Réciproques et dérivées

On considère une trajectoire suivie par un mobile, pour laquelle on peut exprimer y en fonction de x (par exemple, $y = x^2$).
On peut alors parfois exprimer x en fonction de y (dans notre exemple, si l'on suppose que $x \geqslant 0$, $x = \sqrt{y}$).
On peut être amené à calculer la dérivée de y par rapport à x : $\frac{dy}{dx}$, et la dérivée de x par rapport y : $\frac{dx}{dy}$. En physique, pour calculer cette dernière, on pourra écrire que $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ – un autre exemple où l'écriture sous forme de fraction est bien pratique.

Voyons du côté des mathématiques ce que cela donne.

Tout d'abord, on va nommer explicitement la fonction permettant de passer de x à y. On va la noter f, de sorte que pour tout x convenable, $y = f(x)$.
La condition mathématique pour pouvoir exprimer x en fonction de y est que f soit *bijective* (au moins en la restreignant à un certain intervalle). On peut alors écrire $x = f^{-1}(y)$.
Si f est dérivable, ce que l'on note $\dfrac{dy}{dx}$ sera noté f' en maths, alors que $\dfrac{dx}{dy}$ sera $(f^{-1})'$.
Dans le cas où f' ne s'annule jamais, on sait (d'après le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque) que f^{-1} est dérivable, et l'on a la formule suivante, pour tout y dans l'ensemble d'arrivée de f :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Si l'on note – de façon assez naturelle – $f^{-1}(y) = x$, on obtient

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

et en notation différentielle :

$$\frac{dx}{dy}(y) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(x)}.$$

En oubliant que les dérivées sont des fonctions, et donc en ne précisant pas le point où on doit les appliquer (ce qui encore une fois ne pose pas problème en physique dans les cas simples), on retrouve

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

(sous-entendu «en des points y et x "correspondants"».)

2 Fonctions de plusieurs variables

À venir…