Combinatoire et dénombrement (I)

1. Pour un bon départ

Un lien avec toutes les notions : https://www.maths-france.fr/MathSup/Cours/02-ensembles-relations-applications.pdf

1 Ensembles complémentaires

On considère les deux ensembles A et B suivants.
$A = \{0 ; 4 ; 7 ; 5 ; 2 ; 9\}$;
$B = \{1 ; 5 ; 8 ; 2 ; 9 ; 3 ; 6\}$.

1. Déterminer les ensembles suivants.
a. $C = A \cap B$ **b.** $D = A \cup B$.
2. Déterminer le complémentaire de l'ensemble C dans l'ensemble D. Le noter E.
3. Déterminer le complémentaire de l'ensemble C dans l'ensemble A. Le noter F.
4. Déterminer le complémentaire de l'ensemble C dans l'ensemble B. Le noter G.
5. Comparer les ensembles $F \cup G$ et E.
6. Dessiner un diagramme pour les ensembles A et B, puis représenter $F \cup G$ sur ce diagramme.

1.6.2.a Complémentaire d'une partie

DÉFINITION 6 (complémentaire d'une partie).

Soit A une partie d'un ensemble E. Le complémentaire dans l'ensemble E de la partie A, noté $C_E(A)$ ou aussi $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{c} C_E(A) = \{x \in E / x \notin A\} \\ \forall x \in E,\ (x \in C_E(A) \Leftrightarrow x \notin A) \end{array}}$$

Un ensemble est défini en extension lorsqu'il est défini par la liste explicite de ses éléments, comme : U = {6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} ou ℕ = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...}.

Un ensemble est défini en compréhension lorsqu'il est défini par l'une de ses propriétés caractéristiques, comme : $H = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 5 \text{ et } x < 13\}$.

Le cardinal d'un ensemble E est le nombre d'éléments de cet ensemble. On le note n(E) ou Card(E).

2 Détermination d'ensemble

On donne $B = \{a ; b ; c ; d ; e ; f\}$ et $C = \{c ; f ; h ; a ; k ; e\}$.

1. Donner un ensemble A pour lequel on a :
$$(A \cap C) \subset (B \cap C) \text{ et } A \not\subset B.$$
2. Dessiner un diagramme pour représenter les ensembles A, B et C.

Faire un diagramme dès la question 1

3 Dénombrement

Dans une classe de 30 élèves, 25 élèves pratiquent la natation, 11 élèves pratiquent le judo et 8 élèves pratiquent à la fois la natation et le judo.

1. Combien d'élèves pratiquent seulement la natation ? seulement le judo ?
2. Quel est le nombre d'élèves qui ne pratiquent ni la natation ni le judo ?

6 Arbre de dénombrement (1)

Pour former un nombre à deux chiffres, on procède de la façon suivante :
– pour le chiffre des dizaines, on pioche dans un sac contenant trois jetons numérotés respectivement 2, 3 et 4 ;
– pour le chiffre des unités, on pioche dans un sac contenant deux jetons numérotés respectivement 0 et 1.

• À l'aide d'un arbre, déterminer la liste des nombres que l'on peut ainsi former.

7 Arbre de dénombrement (2)

Un antivol de vélo possède un code de trois chiffres, chaque chiffre étant 0, 1, 2 ou 3.

• À l'aide d'un arbre de dénombrement, détermi-ner le nombre de codes possibles.

Exercice n°1

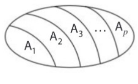
Dans une classe de 32 élèves, 20 étudient l'allemand, 15 l'espagnol et 8 aucune de ces ceux langues. Combien d'élèves étudient l'allemand et l'espagnol ?

2. Principe additif

Propriété

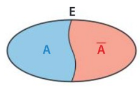
Soient $A_1, A_2, \dots, A_p$, p ensembles finis deux à deux disjoints. On a :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_p)$$



Corollaire

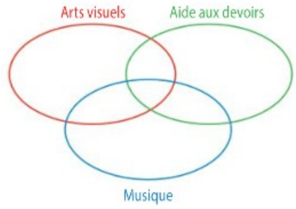
Soient A une partie d'un ensemble E fini et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.
On a : $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.



Exercice n°2

Représenter

Un centre périscolaire propose trois activités aux jeunes qui le fréquentent : aide aux devoirs, arts visuels et musique, chaque inscrit devant choisir au moins une activité.
On sait que 45 inscrits demandent au moins de l'aide aux devoirs, 66 font au moins de la musique et 72 au moins des arts visuels.
Six jeunes sont inscrits aux arts visuels et à l'aide aux devoirs, 21 aux arts visuels et à la musique, 12 à l'aide aux devoirs et à la musique.
Enfin, 15 jeunes sont inscrits aux trois options.
• Recopier et compléter le diagramme ci-dessous et en déduire le nombre total d'inscrits dans ce centre.



Exercice n°3

a. La carte d'un restaurant présente cinq entrées différentes et trois plats différents. Kaïna ne souhaitant pas prendre les deux, hésite entre une entrée et un dessert. Combien a-t-elle de choix possibles ?

b. Le même restaurant propose également quatre desserts différents. Max choisit le menu « entrée, plat, dessert ». Combien de menus différents peut-il composer ?

3. Principe multiplicatif

Définition et propriété

E et F sont deux ensembles non vides.
- Le **produit cartésien** de E par F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$.
- Lorsque les ensembles E et F sont finis, $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

Remarque

Le signe $\times$ dans $\text{Card}(E \times F)$ désigne le produit cartésien des ensembles E et F, alors que celui dans $\text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$ symbolise la multiplication de deux entiers.

Définition et propriété

Soient k un entier supérieur ou égal à 2 et $E_1, E_2, \dots, E_k$, k ensembles non vides.
- Toute liste ordonnée $(x_1\,;\,x_2\,;\dots;\,x_k)$, avec $x_i \in E_i$ pour i allant de 1 à k, est appelée ***k*-uplet** (ou ***k*-liste**).
- L'ensemble de ces k-uplets est le **produit cartésien** $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$.
- Lorsque les ensembles $E_1, E_2, \dots, E_k$ sont finis :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_k).$$

Un 2-uplet est un couple, un 3-uplet est un triplet.

Dans une collection ordonnée, l'ordre compte : si $m \neq k$, alors $(m, k) \neq (k, m)$.

Un produit cartésien peut être représenté par un arbre. Un élément du produit cartésien correspond à un des chemins sur cet arbre.

Le produit cartésien $E \times E$ se note E^2.

Exercice n°4

a. $A = \{1;2;3\}$ et $B = \{0;2\}$. Déterminer $A \times B$ et $B \times A$.

b. $C = \{(5;1)\,;\,(5;0)\,;\,(4;1)\,;\,(4;0)\,;\,(8;1)\,;\,(8;0)\}$. Écrire C sous la forme d'un produit cartésien de deux ensembles.

Ex n°5 : QCM : On considère les ensembles $E = \{a;b;c;d;e\}$ et $F = \{p;q;r\}$

	A	B	C	D
Card(E) =	1	5	0	2^5
Card $(E \cup F)$ =	0	15	5^3	8
Card $(E \times F)$ =	15	5^3	3^5	8
Card (E^4) =	4	5^4	4^5	20
(r,a,p) est un élément de	E^3	$E \times E \times F$	F^3	$F \times E \times F$

Exercice n°6 : Un cadenas possède un code à 4 chiffres allant de 0 à 9.

1. Combien il-y-a-t-il de codes possibles ?

2. Combien il-y-a-t-il de codes... **a)** Commençant et se terminant par 5 ? **b)** Contenant une seule fois 0 ?
c) Uniquement composé de chiffres impairs ? **d)** Contenant au moins une fois le chiffre 2 ?

Exercice n°7 : Un club accueille 68 adhérents. Parmi eux, 39 filles, 13 gauchers et 8 filles gauchères.
Combien il-y-a-t-il de garçons droitiers parmi les adhérents ?

Exercice n°8 : **a.** Combien de chiffres utilise-t-on pour écrire tous les nombres de 1 à 256 ?
b. Un livre a nécessité 612 chiffres pour numéroter toutes ses pages. Combien de pages a ce livre ?