Combinatoire et dénombrement (II)

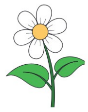
I. Le compte est-il bon ?

1. Le scrabble...

a. Écrire tous les mots de deux lettres, ayant un sens ou pas, avec ces quatre lettres.

b. Combien peut-on créer de mots de trois lettres, ayant un sens ou pas, avec ces quatre lettres ?

2. La marguerite...Chaque pétale peut être coloriée en rouge, en bleu ou en jaune.
Combien de fleurs différentes peut-on créer ?



3. Les poignées de mains...
Sept amis se retrouvent et chacun salue l'autre d'une poignée de main.
Combien de poignées de main échangées au total ?

4. Le podium...
10 athlètes courent la finale du 100 m.
Combien de classements possibles sur le podium ?

5. La surprise...
Une surprise comprend 5 bonbons, tous de couleur différente.

a. On pioche 2 bonbons au hasard en tenant compte de l'ordre : combien il-y-a-t-il de tirages possible ?

b. Même question si cette fois sans tenir compte de l'ordre.

II - Les arrangements

On parle **d'arrangement** lorsqu'on fabrique un p-uplet (donc on tient compte de l'ordre) **sans répétition**.

Exemple 1 : Dans le cas du podium, l'ordre a de l'importance (les médailles n'ont pas la même couleur) et il n'y a pas de répétition (chaque médaille n'est attribuée qu'une seule fois).

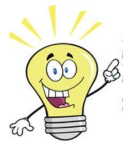
Dans le cas du scrabble, l'ordre a de l'importance (pour que le mot ait un sens, l'ordre des lettres compte) et il n'y a pas de répétition (chaque lettre n'est utilisée qu'une seule fois).

Contre exemple : dans le cas de la marguerite, on choisit une couleur par pétale mais il y a des répétitions donc ce n'est pas un 6-uplet.

n et p sont deux entiers naturels avec $p \leqslant n$. E est un ensemble à n éléments.

Définition : Un arrangement de p éléments d'un ensemble E de cardinal n est un p-uplet d'éléments distincts de E.

On note $\mathrm{A}_n{}^p$ le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E de cardinal n.



Propriété : $\boxed{\mathrm{A}_n{}^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}$

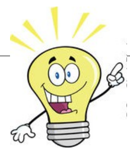
n possibilité pour le 1er choix, $(n-1)$ pour le second, … $(n-p+1)$ pour le dernier choix.

Ainsi pour le podium, on a 10 possibilités pour la médaille d'or, 9 pour celle d'argent et 8 pour celle de bronze soit $10 \times 9 \times 8 = 720$ possibilités : $\mathrm{A}_{10}{}^3 = 10 \times (10-1) \times (10-2)$.

Pour le scrabble, on a 4 possibilités pour la 1ère lettre, 3 pour la seconde et 2 pour la dernière soit $4 \times 3 \times 2 = 12$ possibilités : $\mathrm{A}_4{}^3 = 4 \times (4-1) \times (4-2)$.

Définition et notation : on appelle factorielle n, et on note $n!$ le produit de tous les entiers de 1 à n.

$\boxed{n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1}$ - Par convention $\boxed{0! = 1}$.



Propriété : $\boxed{\mathrm{A}_n{}^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$ *preuve n°1*

Cas particulier : permutation

Définition : Dans le cas où $p = n$, un arrangement des n éléments d'un ensemble E est une permutation.

Propriété : Le nombre de permutations de E est $\boxed{\mathrm{A}_n{}^n = n!}$

Exercice n°1 : Un tournoi de tennis concerne 12 joueurs. Le palmarès récompense le gagnant du tournoi ainsi que les 2e, 3e, 4e et 5e joueur. Combien de palmarès différents peut-il exister ?

Exercice n°2 : Jules range sur une même étagère 5 romans, 3 polars et 2 BD.

a. Combien existe-t-il de façons différentes de ranger ces 10 livres ?

b. Même question si maintenant les livres sont rangés par catégorie.

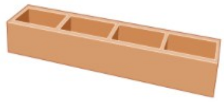
Exercice n°3 : calculer $n!$ pour n de 1 à 10. Vérifier votre calcul avec la calculatrice.

III - Combinaisons

1. Activité

On dispose de 7 jetons numérotés de 1 à 7. L'objectif est de déterminer *le nombre C de façons différentes de choisir 4 jetons parmi les 7.*

Pour cela, on imagine une boîte de rangement à 4 cases.



a. Déterminer le nombre de façons différentes de remplir les 4 cases en mettant un jeton dans chaque case, l'un après l'autre, de gauche à droite (autrement dit, déterminer le nombre de 4-uplets possibles sans répétition).

b. Maintenant on choisit 4 jetons parmi les 7, par exemple 5 ; 7 ; 2 ; 1 (il y a C façons de le faire).
b1. Déterminer le nombre de façons de ranger ces 4 jetons 5 ; 7 ; 2 ; 1 dans le casier.
b2. Exprimer en fonction de C le nombre total de façons de choisir 4 jetons puis de les ranger.
b3. En déduire C.

2. Combinaison de *p* éléments

n et p sont deux entiers naturels avec $p \leqslant n$. E est un ensemble à n éléments.

Définition : Une combinaison de p éléments de E est un sous-ensemble (une partie) de E possédant p éléments.

Exemple 2 : E est l'ensemble des 7 jetons de l'activité ci-dessus.
L'ensemble {1 ; 2 ; 5 ; 7} est une combinaison de 4 éléments de E.
L'ensemble {2 ; 4; 6} est une combinaison de 3 éléments de E.

Notation et propriété

Le nombre de combinaisons de p éléments de E, noté $\binom{n}{p}$, est $\boxed{\binom{n}{p}=\frac{A_n^{\ p}}{p!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}}$

$\binom{n}{p}$ est appelé coefficient binomial et se lit *p parmi n*.

Si $p>n$, $\binom{n}{p}=0$ par convention. Une autre notation existe : $C_n^{\ p}$

Exercice 4 : E = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}

	A	B	C	D
Le nombre de sous-ensembles de E à 3 éléments est :	$\binom{10}{3}$	$10!$	92	3^{10}
Le nombre de combinaisons de 5 éléments de E est :	$\frac{10!}{5!}$	$\binom{10}{5}$	10^5	252
$\binom{23}{5}=$	$\binom{5}{23}$	$\binom{18}{5}$	$\binom{23}{18}$	23×5

Exercice 5 : On dispose d'un jeu de 32 cartes. Combien de façons différentes existe-t-il de choisir :

a. 6 cartes parmi les 32 ? **b.** 4 cartes parmi les trèfles ? **c.** 3 cœurs et 2 piques ?

d. Le valet de cœur et 4 autres cartes.

Exercice 6 : Remplir une grille de Loto consiste à choisir 5 numéros entre 1 et 49 (l'ordre ne compte pas) puis un numéro « chance » de 1 à 10.

a. Combien de grilles différentes peut-on remplir ?

b. Parmi ces grilles, combien seront composées uniquement de numéro pairs ?

Avec une calculatrice :

CASIO	NUMWORKS	TEXAS TI-83
5 OPTN F6 F3 F3 3	paste choisir Denombrement puis choisir **binomial(n,k)** EXE et on saisit les deux nombres 5 et 3.	5 math choisir le mode **PROB** puis choisir le mode **3: Combinaison** 3.

ATTENTION, on ne confond pas arrangement, combinaison et k-uplet

Soit E={1 ; 2 ; 3}

Voici toutes les parties de E : Ø ={} ; {1} ; {2} ; {3} ; {1 ; 2} ; {1 ; 3} ; {2 ; 3} ; {1 ; 2 ; 3}. Il y en a 8.

▶ Un *arrangement* de *k* éléments de E est un k-uplet SANS répétition.
Par exemple (1;2) et (2;1) sont deux arrangements distincts.

▶ Une *combinaison* de partie de E.
Par exemple {1;2} est une combinaison de 2 éléments de E ; c'est la même que {2;1}.

▶Un *k-uplet* est une liste ORDONNÉE de *k* éléments de E, éventuellement deux fois le même.
Par exemple (2;2) est un 2-uplet de E.
(1,2) et (2,1) sont deux 2-uplets différents.

	SANS ORDRE	ORDONNÉ
SANS RÉPÉTITION	Combinaison Exemple : le loto	Arrangements Exemple : le podium
AVEC RÉPÉTITIONS POSSIBLES		k-uplets Exemple : le code secret à *k* chiffres

Méthode	**Ordre**	**Nombre d'éléments**
PERMUTATION	Toujours AVEC ordre	Tous les éléments (*n*)
ARRANGEMENT	Toujours AVEC ordre	Concerne un sous-ensemble d'éléments (*p*).
COMBINAISON	SANS ordre	Concerne un sous-ensemble d'éléments (*p*).

Exemple : Il y a 8 athlètes qui participent aux 100 m.

Combien pouvons-nous obtenir de classements finaux ?	Combien pouvons-nous obtenir de podiums ?	De combien de façons possibles pouvons-nous choisir 4 athlètes dans le but de les convoquer à une réunion ?
a) Est-ce que l'ordre est important? OUI b) Est-ce que cela concerne tous les éléments? OUI	a) Est-ce que l'ordre est important? OUI b) Est-ce que cela concerne tous les éléments? NON	a) Est-ce que l'ordre est important? NON b) Est-ce que cela concerne tous les éléments? NON
Donc, c'est une **permutation** $n!=8!=40320$	Donc, c'est un **arrangement** $n=8$ et $p=3$ $A_8^3=8\times7\times6=336$	Donc, c'est une **combinaison** $n=8$ et p $=3$ $\binom{8}{4}=70$

IV - Calculer avec les coefficients binomiaux

Si $p=0$, alors $\boxed{\binom{n}{0}=1}$ car le seul sous-ensemble de E ayant 0 éléments est l'ensemble vide $\varnothing$

Si $p=1$ alors $\boxed{\binom{n}{1}=n}$ car il y a n sous-ensemble de E à 1 élément (n singletons).

Si $p=n$ alors $\boxed{\binom{n}{n}=1}$ car il y a un seul sous-ensemble de E à n élément : E.

Si $p=2$ alors $\boxed{\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}}$ *Preuve*

Propriétés

Symétrie : $\boxed{\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}}$ *Preuve*

Relation de Pascal : $\boxed{\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}}$ *Preuve*

Triangle de Pascal :

Triangle de Pascal

La relation de Pascal permet de calculer les coefficients $\binom{n}{p}$, de proche en proche, sous la forme du tableau triangulaire ci-contre.

$\binom{6}{3}+\binom{6}{4}=\binom{7}{4}$

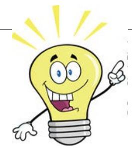
n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Remarque :

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p}$$

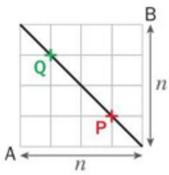
Propriété

Soit n un entier naturel. On a $\boxed{\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=2^n}$. *Preuve...*



Exercice 7 :

On considère une grille carrée de côté n, où $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle **chemin** un itinéraire joignant le point A au point B, suivant le quadrillage et allant uniquement vers le haut ou vers la droite.



a. Démontrer que le nombre total de chemins est $\binom{2n}{n}$.

b. Justifier que $\binom{n}{3}^2$ chemins passent par P .

c. Déterminer le nombre de chemins qui passent par Q.

d. Démontrer que le nombre total de chemins est :

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\binom{n}{3}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2.$$

e. Conclure.

Billet de 500 F appelé le "Pascal"

Exercice 8 (QCM extrait du manuel Barbazo, Tle) : une seule bonne réponse, brouillon indispensable

1. Le nombre de façons de ranger quatre DVD sur deux étagères est :
   a) 2^4 b) 4^2 c) $\binom{4}{2}$

2. Sans calculatrice, le nombre $\binom{7}{4}$ est égal à :
   a) 45 b) 35 c) 30

3. Sans calculatrice, $\frac{12!}{13!}$ est égal à :
   a) 13 b) $\frac{1}{13}$ c) $\frac{12}{13}$

4. Sans calculatrice, $\frac{8!-6!}{5!}$ est égal à :
   a) 330 b) $\frac{2!}{5!}$ c) $\frac{7}{15}$

5. Sans calculatrice, l'égalité vraie est :
   a) $\binom{24}{6}=\binom{23}{5}+\binom{23}{6}$
   b) $\binom{24}{6}=\binom{23}{5}+\binom{23}{4}$
   c) $\binom{24}{6}=\binom{24}{5}+\binom{24}{4}$

6. On considère les ensembles :
   $A=\{x\,;y\,;z\}$ et $B=\{u\,;v\,;w\}$.
   a) $\text{Card}(A\times B)=6$
   b) $\text{Card}(A\times B)=3$
   c) $\text{Card}(A\times B)=9$

7. Trois garçons et trois filles se rendent au stade pour voir un match de rugby. Ils s'assoient sur le même rang.
   Ils peuvent s'asseoir :
   a) de 720 façons différentes.
   b) de 620 façons différentes.
   c) de 520 façons différentes.

8. Douze lévriers numérotés de 1 à 12 s'apprêtent à se lancer au départ d'une course. On appelle « quinté », dans l'ordre ou le désordre, les numéros de cinq premiers lévriers arrivés.
   Par exemple, $\{3\,;5\,;11\,;2\,;7\}$ est un quinté mais on ne sait pas dans quel ordre sont arrivés les lévriers.
   Le nombre de quintés possibles est :
   a) 792 b) 732 c) 7 920

Exercice 9 (Vrai/Faux extrait du manuel Barbazo, Tle), brouillon indispensable.

1. Soit n un entier naturel et E un ensemble de cardinal n.
   Affirmation : Le nombre de parties non vides de E est 2^{n-1}.

2. Soit E un ensemble fini non vide dont un des éléments est noté x_1.
   Affirmation : Il y a autant de parties de E contenant x_1 que de parties ne le contenant pas.

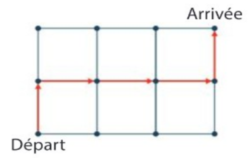
3. **Affirmation :** Le nombre de points du plan à coordonnées entières $(x\,;y)$ tels que :
   $10 \leqslant x < 40\,;10 \leqslant y < 40\,;x < y$ est 900.

4. On tire au hasard et simultanément cinq cartes dans un jeu de 32 cartes. Une main est un ensemble de cinq cartes.
   Affirmation : Il y a 32^5 mains possibles.

5. Soient $A=\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ et n un entier naturel non nul.
   Affirmation : On peut former n^6 nombres à n chiffres avec les chiffres de A.

6. **Affirmation :** Il y a 127 façons de choisir une ou plusieurs personnes dans un groupe de sept personnes.

7. **Affirmation :** Chercher le nombre de trajets les plus courts pour aller du départ à l'arrivée sur le schéma ci-dessous revient à calculer $\binom{5}{2}$.



► Vidéo Yvan Monka (16') : https://youtu.be/VVY4K-OT4FI

► Une série d'exercices avec la correction : http://maths-simplifie.meabilis.fr/mbFiles/documents/exercices-corriges-denombrement.pdf