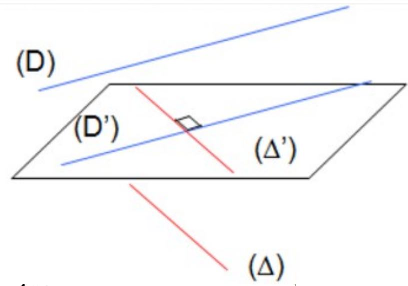
Espace (III) : Partie 2
Droites orthogonales, vecteur normal à un plan

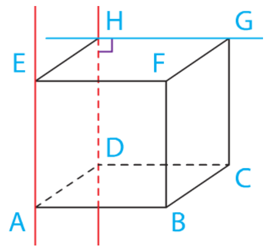
III - Droites orthogonales

Orthogonale et perpendiculaire : quelle différence ? en vidéo : ici



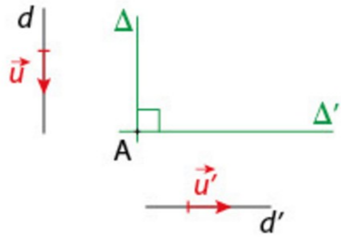
Définition :
Deux droites de l'espace sont orthogonales si, et seulement si, il existe deux droites coplanaires qui leur sont parallèles et qui sont perpendiculaires entre elles.

Propriété : Orthogonalité de deux droites de l'espace
Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.



Exemple 1 : Sur le cube représenté ci-contre, les droites (HD) et (GH) sont perpendiculaires en H. Comme (AE) est parallèle à (HD), les droites (AE) et (GH) sont orthogonales.
La droite (FB) est parallèle à la droite (AE) donc les droites (FB) et (GH) sont orthogonales.
La droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABC) car elle est orthogonale aux droites (AB) et (AD) incluses dans le plan (ABC).

Un autre exemple en vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=qKWghhaQJUs



Propriété : Caractérisation vectorielle de l'orthogonalité de deux droites
Deux droites d et d' de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont orthogonales
si et seulement si $\vec{u}\,.\,\vec{u'}=0$

Exemple 2 : Soient (d) et (d') définies par : $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-3t \\ z=3-t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et $\begin{cases} x=4t' \\ y=6t'-2 \\ z=-2t'+4 \end{cases}$, $t'\in\mathbb{R}$

(d) et (d') sont-elles orthogonales ?

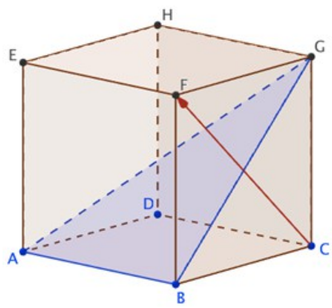
Les vecteurs directeurs respectifs de (d) et (d') sont $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$.

$\vec{u}.\vec{u}'=4-18+2\neq 0$ donc (d) et (d') ne sont pas orthogonales.

ATTENTION: *Dans le plan, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors ces deux droites sont parallèles entre elles*. **Cette propriété n'existe pas dans l'espace.**

Soit trois droites de l'espace (d_1), (d_2) et (d_3) telles que (d_1) et (d_2) sont toutes les deux orthogonales à (d_3) mais attention on ne peut rien en déduire entre (d_1) et (d_2).

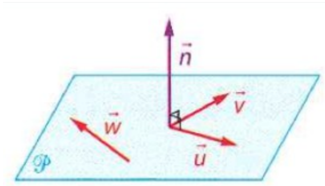
Dans le cube ci-contre,
(AB) et (BG) sont orthogonales (et même perpendiculaires)
(AB) et (BC) sont orthogonales (et même perpendiculaires)
et les droites (BG) et (BC) sont sécantes !



Exercice 1	**Exercice 2**
On considère la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est donnée ci-dessous. $\mathscr{D}:\begin{cases}x=t+1\\y=-t-1, t\in\mathbb{R}.\\z=2t-2\end{cases}$ Soient $A(-2;2;6)$ et $B(-3;0;4)$ deux points de l'espace. **1.** Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont-elles parallèles ? **2.** Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont-elles orthogonales ?	On considère les droites Δ_1 et Δ_2 dont on donne pour chacune une représentation paramétrique. $\Delta_1:\begin{cases}x=3t-6\\y=t\\z=4\end{cases}, t\in\mathbb{R}$; $\Delta_2:\begin{cases}x=-3t'+3\\y=2t'-3\\z=t'+2\end{cases}, t'\in\mathbb{R}.$ **1.** Justifier que le point $A(-3;1;4)$ appartient à chacune de ces deux droites. **2.** Que peut-on en déduire sur la position relative de Δ_1 et Δ_2 ? **3.** Ces deux droites sont-elles perpendiculaires ? confondues ?

IV. Vecteur normal à un plan

1. Définition et propriétés

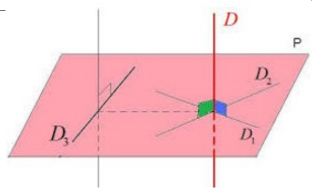


Définition : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan P lorsqu'il est orthogonal à tout vecteur $\vec{w}$ admettant un représentant dans P.

Théorème : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan P s'il est orthogonal à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *non colinéaires* de P.

Démonstration : Elle est incluse dans la démonstration du corollaire qui suit.

Définition : Une droite d est orthogonale à un plan P si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans le plan P.

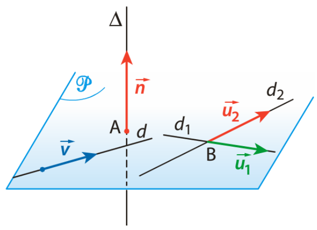


Corollaire : Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Démonstration (ROC)

- Si une droite est orthogonale à toute droite d'un plan ***P*** alors elle est, en particulier, orthogonale à deux droites sécantes de ***P***.

- Démontrons la réciproque : Soit une droite (Δ) de vecteur directeur $\vec{n}$ orthogonale à deux droites (d_1) et (d_2) de ***P*** sécantes et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.
Alors $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont non colinéaires et orthogonaux au vecteur $\vec{n}$.



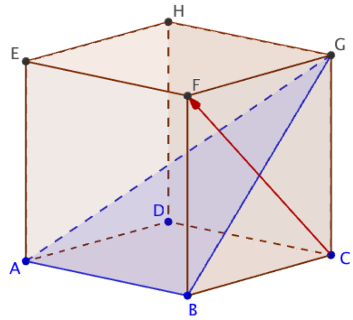
Soit une droite <u>quelconque</u> (d) de ***P*** de vecteur directeur $\vec{v}$.
<u>Démontrons que (Δ) est orthogonale à</u> (d).
$\vec{v}$ peut se décomposer en fonction de $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ qui constituent une base de P (car non colinéaires). Il existe donc deux réels x et y tels que $\vec{v}=x\vec{u_1}+y\vec{u_2}$.

Donc $\vec{v}.\vec{n}=(x\vec{u_1}+y\vec{u_2}).\vec{n}=x\vec{u_1}.\vec{n}+y\vec{u_2}.\vec{n}=0$ car $\vec{n}$ est orthogonal avec $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.
Donc $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\vec{v}$. et (d) est orthogonale à (Δ).

Remarque : Pour déterminer si un vecteur est normal à un plan , il faut démontrer que ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires inclus dans le plan.

Exemple 3 : Soit ABCDEFGH est un cube.

Démontrer que le vecteur $\vec{\text{CF}}$ est normal au plan (ABG).



Méthode 1 : sans coordonnées

$\vec{\text{CF}}\cdot\vec{\text{BG}}=\vec{0}$ car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires

$\vec{\text{CF}}\cdot\vec{\text{AB}}=(\vec{\text{CB}}+\vec{\text{BF}})\cdot\vec{\text{AB}}=\vec{\text{CB}}\cdot\vec{\text{AB}}+\vec{\text{BF}}\cdot\vec{\text{AB}}=0$

$\vec{\text{CF}}$ est orthogonal à deux vecteurs $\vec{BG}$ et $\vec{\text{AB}}$ non colinéaires et inclus dans (ABG) donc le vecteur $\vec{\text{CF}}$ est normal à (ABG).

Méthode 2 : avec coordonnées

On considère le repère $\left(B;\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right)$.

Dans ce repère : $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, G\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

On a ainsi :

$\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, donc : $\begin{matrix}\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{BG}=0\times0-1\times1+1\times1=0\\\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB}=0\times(-1)-1\times0+1\times0=0\end{matrix}$

Donc $\overrightarrow{CF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABG), il est donc normal à (ABG).

Méthode : Déterminer un vecteur normal à un plan

Dans un repère orthonormé, soit trois points $\text{A}(4;2;2)$, $\text{B}(3;3;1)$ et $\text{C}(1;1;1)$.
Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

Solution : On cherche un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ tel que $\begin{cases}\vec{n}.\vec{\text{AB}}=0\\\vec{n}.\vec{\text{AC}}=0\end{cases}$ © $\begin{cases}-a+b-c=0\\-3a-b-c=0\end{cases}$

On a un système à deux équations et 3 inconnues !
Il a une infinité de solution, déterminons en une en posant par exemple $a=1$

On obtient $\begin{cases}a=1\\b-c=1\\b+c=-3\end{cases}$ © $\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=-2\end{cases}$. Un vecteur normal au plan (ABC) est donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

Exercice 3 : Dans un repère orthonormé, soit trois points A(1 ; 2 ; -2) , B(-1 ; 3 ; 1) et C(2 ; 0 ; -2).
Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

Exercices du livre :

69 Soit A (–2 ; 1 ; 0), B (1 ; 3 ; 1) et C (3 ; 0 ; 3).

1. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$(–7 ; 4 ; 13) est un vecteur normal au plan (ABC).

70 Soit A (1 ; 3 ; –5), B (1 ; 8 ; –7) et C (5 ; 4 ; –4).

1. Justifier que les points A, B et C définissent un plan $\mathscr{P}$.

2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$(–7 ; 8 ; 20) est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

71 Soit A (4 ; 1 ; 5), B (7 ; –1 ; 10) et C (8 ; 0 ; 8).

1. Justifier que les points A, B et C définissent un plan.

2. Soit *a*, *b* et *c* trois réels et $\vec{n}$(*a* ; *b* ; *c*) un vecteur.

a. Exprimer $\vec{\text{AB}}\cdot\vec{n}$ en fonction de *a*, *b* et *c*.

b. Exprimer $\vec{\text{AC}}\cdot\vec{n}$ en fonction de *a*, *b* et *c*.

c. En déduire un vecteur normal du plan (ABC).