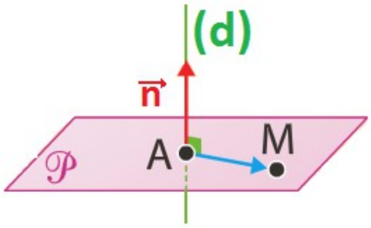
Espace (III) : Partie 3
Équation cartésienne de plan



Équation cartésienne d'un plan

Propriété : Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace.
L'unique plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Preuve

- Soit M un point du plan P et (d) une droite de vecteur directeur $\vec{n}$.
La droite (AM) est alors une droite du plan P.
Comme (d) est orthogonale à toutes les droites de P, elle est orthogonale à (AM) donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
Alors M est confondu avec A ou (AM) est orthogonale à la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$, c'est à dire que M appartient au plan contenant A et orthogonal à (d).

Théorème : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. *a, b, c et d* sont des réels.
Un plan P de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ non nul a une équation cartésienne de la forme : $ax+by+cz+d=0$

Réciproquement :
Si *a*, *b* et *c* sont non tous nuls, l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan.

Démonstration (ROC)

- Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point du plan P de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

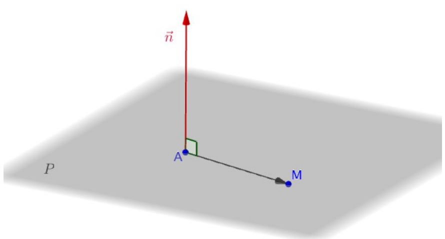
On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$

$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ © $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$.
En posant $d=-(ax_0+by_0+cy_0)$, on obtient donc $ax+by+cz+d=0$.

- *Réciproquement*, puisque *a*, *b* et *c* ne sont pas tous nuls, on peut supposer par exemple que *a* est différent de 0. Le point $A(\frac{-d}{a};0;0)$ appartient à l'ensemble (E) et l'équation $ax+by+cz+d=0$ équivaut à

$a\left(x+\frac{d}{a}\right)+by+cz=0$ c'est à dire à $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ où $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

(E) est donc le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.



Remarque : Un plan possède une infinité d'équation cartésienne.

Exemple 1 : Un vecteur normal du plan P d'équation cartésienne $x-y+5z+1=0$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$

Cette partie de leçon en vidéo : *ici*

Méthode : déterminer une équation cartésienne de plan connaissant un point et un vecteur normal

Dans un repère orthonormé, soit *P* le plan passant par le point $A(-1;2;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$

Une équation cartésienne de P est de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec $a=3$, $b=-3$ et $c=1$.

Une équation cartésienne de P est donc de la forme : $3x-3y+z+d=0$.

A est un point de P donc $3\times x_A-3\times y_A+1\times z_A+d=0$

On en déduit $d=8$ et une équation cartésienne de P : $3x-3y+z+8=0$.

Pour revoir la méthode en vidéo : ici

Exercice 1 : P est le plan passant par le point $E(1;4;-2)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan P.

b) Le point $F(2;5;-1)$ appartient-il au plan P ?

c) Déterminer les coordonnées d'un point G du plan P différent de E.

Exercice 2 : Dans un repère orthonormé de l'espace, P est le plan d'équation cartésienne $x-2y-z-1=0$.

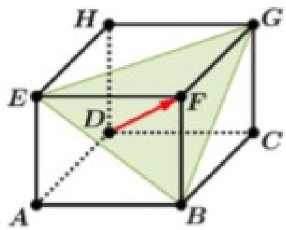
a) Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ à ce plan.

b) Déterminer les coordonnées d'un point A de ce plan.

Exercice 3 : ABCDEFGH est un cube d'arête 1. Voir la figure ci-contre :
On se place dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

1) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).

2) En déduire une équation cartésienne du plan (EBG)



Exercice 4 : On considère le plan P passant par $C(3;-2;5)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix}$.

1) Déterminer une équation cartésienne de ce plan.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan R, parallèle au plan P et qui passe par l'origine du repère.

Exercice 5 : Soit $A(-3;2;1)$, $B(-1;1;0)$ et $C(-4;4;3)$ trois points d'un repère de l'espace.

1. Justifier que A, B et C définissent un plan.

2. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ non nul tel que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

3. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercices du livre pages 277/278

84 Soit A (2 ; –5 ; 1), B (4 ; –2 ; –4) et C (6 ; –4 ; 1).

1. Vérifier que A, B et C définissent un plan.

2. Démontrer que $\vec{n}(-1;4;2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

3. En déduire une équation du plan (ABC).

89 Pour chacun des plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$, donner un vecteur normal.

1. $\mathcal{P}_1 :\ 5x-3y+2z=0$

2. $\mathcal{P}_2 :\ y+7z+2=0$

3. $\mathcal{P}_3 :\ -x+2z-5=0$

88 Soit A (–1 ; 0 ; 1), B (1 ; 4 ; –1), C (3 ; –4 ; –3) et S (4 ; 0 ; 4).

1. Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en A.

2. a. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{SO}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire une équation du plan (ABC).

c. Vérifier que le point O appartient au plan (ABC).

3. a. Justifier que [SO] est une hauteur du tétraèdre SABC.

b. Calculer le volume de ce tétraèdre.

AIDE : question 3. b. Le volume d'un tétraèdre est le produit du tiers de l'aire de la base par la hauteur.