Espace (III) : Partie 4
Positions relatives droites et plan, projeté orthogonal

I - Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace

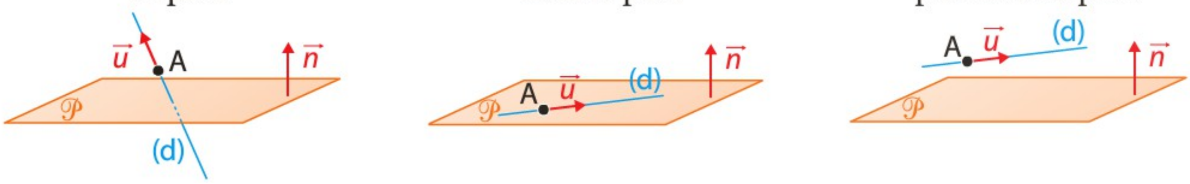
Propriété :
Soit (d) une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et P un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

(1) Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, la droite (d) et le plan P sont sécants.

(2) Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux :

- Si A appartient à P, la droite (d) est incluse dans le plan P ;
- Si A n'appartient pas à P, la droite (d) est strictement parallèle au plan P.

La droite est sécante au plan | La droite est incluse dans le plan | La droite est strictement parallèle au plan



Méthode 1 : Étudier la position relative d'une droite Δ et d'un plan P

P et Δ sont-ils sécants ?

Si P et Δ sont pas sécants, Δ est-elle strictement parallèle à P ou incluse dans P ?

Exemple : Dans un repère orthonormé de l'espace, soit *P* le plan d'équation $2x-y+3z-2=0$ et (AB) la droite passant par les points $A(1;2;-3)$ et $B(-1;2;0)$. Étudier la position relative de *P* et (d).

Solution en vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=BYBMauyizhE

1) Un vecteur normal de *P* est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$.

(AB) et *P* sont sécants si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux.
Comme $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=-2\times2+3\times3=5\neq0$, on conclut que (AB) et le plan *P* ne sont pas parallèles et donc sécants.

2) Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases}x=1-2t\\y=2\\z=-3+3t\end{cases}\quad \text{avec } t \text{ réel.}$$

Le point $M(x;y;z)$ intersection de (AB) et de *P* vérifie donc le système suivant :

$$\begin{cases}x=1-2t\\y=2\\z=-3+3t\\2x-y+3z-2=0\end{cases}$$

On remplace les valeurs « paramétriques » de *x*, *y* et *z* dans l'équation du plan.

On a donc $2(1-2t)-2+3(-3+3t)-2=0 \Leftrightarrow 5t-11=0$ soit $t=\frac{11}{5}$.

D'où $\begin{cases}x=1-2\times\frac{11}{5}=-\frac{17}{5}\\y=2\\z=-3+3\times\frac{11}{5}=\frac{18}{5}\end{cases}$

Ainsi la droite (AB) et le plan *P* sont sécants en $M\left(-\frac{17}{5};2;\frac{18}{5}\right)$.

L'exercice 102 page 279 est un exercice corrigé qui reprend cette méthode.

Exercice 1

Soit Δ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1-2k \\ y=4k \\ z=-2+k \end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$

et le plan P d'équation cartésienne : $3x-y+2z-3=0$.

1. Justifier que la droite et le plan sont sécants.

2. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 2

Soit Δ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-7+t \\ y=2t \\ z=4-t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

et le plan P d'équation cartésienne $x+2y-z-1=0$

Étudier la position relative de Δ et P.

Exercices du livre :

91 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $5x+3y-4z+8=0$ et A (1 ; 0 ; 2) un point de l'espace.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d), perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ et passant par le point A.

98 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $7x+2y-z+4=0$.
Les droites (d_1) et (d_2) sont définies par une représentation paramétrique donnée ci-dessous :

(d_1) $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 3+4t \\ z = 5+t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ (d_2) $\begin{cases} x = 15-3t \\ y = -9+t \\ z = 7+2t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

1. Le plan $\mathcal{P}$ et la droite (d_1) sont-ils sécants ?

2. Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (d_2).

99 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $5x-3y+3z-2=0$.
Les droites (d_1) et (d_2) sont définies par une représentation paramétrique donnée ci-dessous :

(d_1) $\begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+5t \\ z = -7-3t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ (d_2) $\begin{cases} x = 5+2t \\ y = -5-3t \\ z = 10+5t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

1. Le plan $\mathcal{P}$ et la droite (d_1) sont-ils sécants ?

2. Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (d_2).

→ Pour vous aider Savoir-faire 7, p. 273

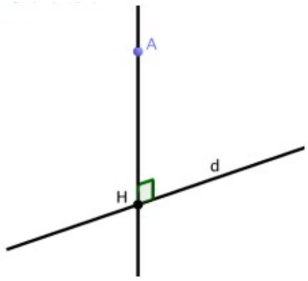
100 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x+y-5z+3=0$ et (d) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 2+t \end{cases} \text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (d).

II - Projeté orthogonal

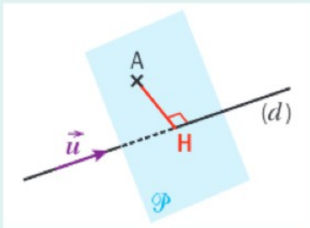
a. Projeté orthogonal d'un point sur une droite



Propriété – définition
Soit un point A et une droite Δ de l'espace.
La projection orthogonale de A sur Δ est le point H appartenant à Δ tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite Δ.
La longueur **AH** s'appelle alors la **distance** du point A à la droite Δ.

Propriété

Si (d) est une droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_0 + a \times t \\ y = y_0 + b \times t \\ z = z_0 + c \times t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, A un point de l'espace et



$H(x_H\,;\,y_H\,;\,z_H)$ le **projeté orthogonal du point A sur la droite (d)**, alors :

- le plan $\mathscr{P}$ passant par A et orthogonal à la droite (d) admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + k = 0$, où k est un nombre réel ;
- le triplet $(x_H\,;\,y_H\,;\,z_H)$ est l'unique triplet vérifiant à la fois la représentation paramétrique de (d) et l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

La droite (d) passe par le point de coordonnées $(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

Si A est un point de la droite (d), alors son projeté orthogonal sur (d) est lui-même.

Exemple : Soit $A(5;-4;7)$ et Δ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 8+2t \\ y = -4-t \\ z = -5-3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur Δ.
2. En déduire la distance du point A à la droite Δ.

1^er^ étape : On détermine l'équation cartésienne du plan ***P*** passant par A et orthogonal à Δ.

Ce plan a pour vecteur normal un vecteur directeur de Δ c'est à dire $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Donc l'équation de ***P*** est de la forme : $2x - y - 3z + d = 0$
Or, A est un point de P donc $2 \times 5 - (-4) - 3 \times 7 + d = 0$
D'où $d = 7$ et $P : 2x - y - 3z + 7 = 0$

2^e^ étape : On détermine les coordonnées de H point d'intersection entre Δ et le plan ***P***.

$$H(x;y;z) \in \Delta \cap P \Leftrightarrow : \begin{cases} x = 8+2t \\ y = -4-t \\ z = -5-3t \\ 2x - y - 3z + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8+2t \\ y = -4-t \\ z = -5-3t \\ 2(8+2t) - (-4-t) - 3(-5-3t) + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ x = 2 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Donc les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur Δ sont $H(2;-1;4)$.

2. La distance du point A à la droite Δ est la longueur AH :

$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Exercice 4 : On considère la droite $\Delta : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -3-t \\ z = 20+2t \end{cases}$, $\ell \in \mathbb{R}$ ainsi que le point $A(3;5;4)$.

Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.

Exercice 5

Dans un repère orthonormé de l'espace, d est la droite qui passe par le point $A(1;3;0)$ et dont $\vec{u}(-2;1;5)$ est un vecteur directeur. B est le point de coordonnées $(2;0;7)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par B et orthogonal à d.

b) En déduire les coordonnées du point K, projeté orthogonal de B sur d.

Exercice 6

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère le point A(-1;1;2)

et la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 1-2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$, c'est à dire la plus petite des longueurs AM lorsque M décrit la droite $\mathcal{D}$.

Méthode 1

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = AM$ où M est un point de $\mathcal{D}$ de paramètre t. Déterminer $f(t)$ en fonction de t puis le minimum de f. Conclure.

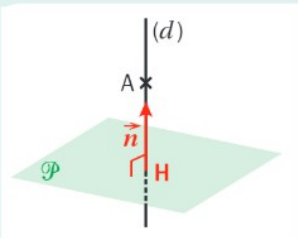
Méthode 2

2.a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A.
2.b) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.
2.c) Conclure.

b. Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Propriété

Si $\mathcal{P}$ est un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+k=0$, $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace et $H(x_H;y_H;z_H)$ le **projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$**, alors :



- la droite (d) passant par A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_A + a\times t \\ y = y_A + b\times t \\ z = z_A + c\times t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$;
- le triplet $(x_H;y_H;z_H)$ est l'unique triplet vérifiant à la fois l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ et la représentation paramétrique de (d).

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, est un vecteur directeur de la droite (d).

Si A est un point du plan $\mathcal{P}$, alors son projeté orthogonal sur le plan $\mathcal{P}$ est lui-même.

Exemple : Soit P le plan d'équation cartésienne $x-y+z-9=0$ et A le point de coordonnées $(-1;-1;3)$

1. Déterminer les coordonnées de projeté orthogonal de A sur le plan P.

2. En déduire la distance du point A au plan P.

Méthode

On commence par déterminer une équation paramétrique de la droite Δ perpendiculaire au plan P et passant par A puis les coordonnées du point H intersection entre Δ et le plan P.

1. La droite Δ perpendiculaire au plan P a pour vecteur directeur un vecteur normal du plan P donc par exemple $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une équation paramétrée de la droite Δ est donc $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-1-t \\ z=3+t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Pour obtenir les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur le plan P, il faut déterminer les coordonnées du point H intersection entre Δ et le plan P.

$$\mathrm{H}(x\,;y\,;z)\in\Delta\cap\mathrm{P} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x=-1+t \\ y=-1-t \\ z=3+t \\ x-y+z-9=0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t=2 \\ x=1 \\ y=-3 \\ z=5 \end{cases}.$$

Donc le point H, projeté orthogonal du point A sur le plan P admet alors pour coordonnées $(1;-3;5)$.

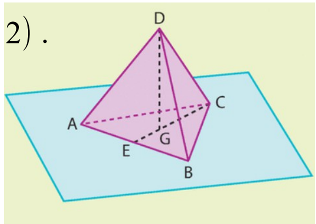
2. La distance du point A au plan P est alors $\mathrm{AH}=\sqrt{2^2+(-2)^2+2^2} = 2\sqrt{3}$.

Exercice 7

1. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $\mathrm{A}(2;1;3)$ sur le plan P ayant pour équation cartésienne : $x-3y+2z-1=0$.

2. Déterminer la distance du point A au plan P.

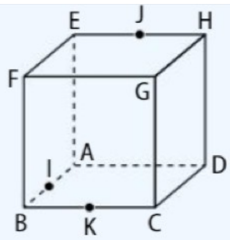
Exercice 8 : Soit $\mathrm{A}(-7;-15;3)$, $\mathrm{B}(-4;20;-1)$, $\mathrm{C}(4;5;30)$ et et $\mathrm{D}(25;0;2)$.



1. Montrer que ABCD est un tétraèdre régulier (c'est à dire que toutes ses faces sont des triangles équilatéraux).
2. Calculer la longueur de la hauteur issue de D.
3. En déduire le volume de ABCD.

Exercice 9 :

Soit ABCDEFGH un cube.
L'espace est muni du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
Soit I le milieu du segment [AB], J le milieu du segment [EH] et K le milieu du segment [BC].



1 **a.** Déterminer les coordonnées de I, J et K.
b. Démontrer que le triangle IJK est rectangle en I.
c. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ du triangle IJK.

2 On admet que le point $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ est le projeté orthogonal de F sur le plan (IJK). Déterminer le volume $\mathscr{V}$ du tétraèdre IJKF.

Exercice 10

La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH. Les points I, J, K sont définis par les conditions suivantes : I est le milieu de [AD]. $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$. K est le milieu de [FG].

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

1. Donner sans justification les coordonnées de I, J et K.
2. Justifier que I, J et K définissent un plan.
3. Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\vec{n}(4; a; b)$ soit normal au plan (IJK).
4. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
5. On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK).

   On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ 0 < z < 1 \end{cases}$.

   Le point R est-il à l'intérieur du cube?