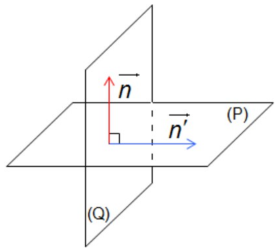
Espace (III) : Partie 5
Positions relatives de plans

Position relatives de deux plans

Définition : Deux **plans** sont dits **perpendiculaires**, si l'un des deux plans contient une droite perpendiculaire à l'autre plan.



Propriété : Deux plans (P) et (Q) sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Exemple 1 : Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives $2x+4y+4z-3=0$ et $2x-5y+4z-1=0$. Démontrer que les plans P et P' sont perpendiculaires.

Solution :

La solution en vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=okvo1SUtHUc

Les plans P et P' sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de P' est $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$.

$\vec{n}.\vec{n}' = 2\times2+4\times(-5)+4\times4=0$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux donc les plans P et P' sont perpendiculaires.

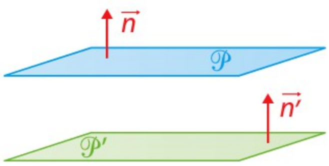
Propriétés : On se place dans un repère orthonormé.
Soit P et P' les plans d'équations respectives $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$ et de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

(1) Les plans P et P' sont parallèles ou confondus si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.

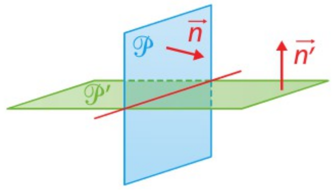
(2) Lorsque $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, les plans P et P' sont sécants suivant une droite dont chaque point de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient le système $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$.

(3) Les plans P et P' sont perpendiculaires si et seulement si, $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux .

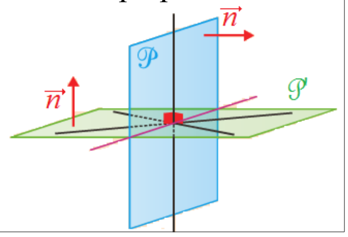
Les plans sont parallèles



Les plans sont sécants



Les plans sont perpendiculaires



Méthode : Déterminer l'intersection de deux plans

Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives $-x+2y+z-5=0$ et $2x-y+3z-1=0$.

1. Démontrer que P *et* P' sont sécants.

2. Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection d.

Cette méthode en vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=BYBMauyizhE

Solution

1) P et P' sont sécants si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

Un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de P' est $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc leurs vecteurs ne sont pas colinéaires.

2) Le point $M(x;y;z)$ de d, intersection de P et de P', vérifie donc le système suivant :

$$\begin{cases}-x+2y+z-5=0\\2x-y+3z-1=0\end{cases}$$

Ce système comprend trois inconnues et deux équations, il
On choisit par exemple x comme paramètre et on pose $x=t$. On a alors :

$$\begin{cases}x=t\\-t+2y+z-5=0\\2t-y+3z-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\z=-2y+t+5\\-y+3z=1-2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\z=-2y+t+5\\-y+3(-2y+t+5)=1-2t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\z=-2y+t+5\\-y-6y+3t+15=1-2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\z=-2y+t+5\\-7y=-14-5t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\y=2+\frac{5}{7}t\\z=-2\left(2+\frac{5}{7}t\right)+t+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\y=2+\frac{5}{7}t\\z=1-\frac{3}{7}t\end{cases}$$

Ce dernier système est une représentation paramétrique de d, avec $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 1 : On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$
On considère les plans P et P′ d'équations respectives : $2x+3y-z+3=0$ *et* $x+y+z-1=0$.

1. Démontrer que P et P′ sont sécants selon une droite D.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D.

Exercice 2 : On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les plans P_1 et P_2 d'équations respectives $x-2y+z+5=0$ et $4x+y-z-2=0$.
Déterminer une équation cartésienne du plan P perpendiculaire à P_1 et P_2 passant par le point A(2;-1;1).

Exercice du livre page 279

109 On considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives :
$$5x+6y-7z+4=0 \text{ et } x-2y+z=0.$$
1. Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

110 On considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives :
$$7x-2y-5z-7=0 \text{ et } x+5y-6z-1=0.$$
1. Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

111 Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives :
$$4x-2y+6z-1=0 \text{ et } 6x-3y+9z-3=0$$
sont strictement parallèles.

114 Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$, parallèle au plan $\mathcal{P}'$ d'équation $4x+3y-z+1=0$ et passant par le point A $(7;4;3)$.

115 Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$, parallèle au plan $\mathcal{P}'$ d'équation $x+2y-7z+2=0$ et passant par le point A $(0;1;0)$.

116 Montrer que le système d'équations :
$$\begin{cases} 4x+y-3z=1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$
définit une droite (d) de l'espace.

Donner un vecteur directeur de (d).

117 Soit $\mathcal{P}_1$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_1(1;1;1)$ et $\mathcal{P}_2$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_2(4;-2;3)$.

1. Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

2. Démontrer que le vecteur $\vec{u}(5;1;-6)$ est un vecteur directeur de la droite (d) intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

AIDE : question 2. Un vecteur commun à deux plans sécants est un vecteur directeur de leur droite d'intersection.

118 Soit $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ les plans d'équations respectives :
$$x+2y-3z+1=0,\ y-z+3=0 \text{ et } z-5=0.$$
Déterminer l'intersection de ces trois plans.

119 Soit $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ les plans d'équations respectives :
$$-2x+y+z+1=0,\ x-2y+z+7=0 \text{ et } 3x-y+z-7=0.$$
1. a. Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

2. a. Justifier que la droite Δ et le plan $\mathcal{P}_3$ sont sécants.

b. Déterminer le point d'intersection de Δ et $\mathcal{P}_3$.

120 Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équations respectives :
$$-4x+3y+z-5=0 \text{ et } 5x+7y-z+3=0.$$
Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

→ Pour vous aider Savoir-faire 8, p. 273

121 Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équations respectives :
$$-11x+5y+6z-2=0 \text{ et } 4x-2y+9z+1=0.$$
Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

→ Pour vous aider Savoir-faire 8, p. 273

VRAI – FAUX

Pour les exercices **123** à **125**, indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

123 Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives :
$2x-3y+z=0$ et $2x+3z+1=0$ sont parallèles.

124 L'intersection des plans $\mathcal{P}$ d'équation $2x+3y+4z-1=0$ et $\mathcal{Q}$ d'équation $x+2y+3z-4=0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(1;-2;-1)$.

125 Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives :
$$x+3y+z=0 \text{ et } -3x+y+z=0$$
sont perpendiculaires.